UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

AS AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA SALA DE AULA

Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira

Orientador: Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

2018

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

AS AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA SALA DE AULA

Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira

Orientador: Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática.

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutora Maria Helena de Sousa Martinho, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho;
- Doutora Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa;
- Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientador;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsa com referência SFRH/BD/94928/2013.

2018

Resumo

Este estudo tem por objetivo compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula. A fundamentação teórica aborda o raciocínio matemático, nomeadamente quanto aos tipos de inferências e quanto aos processos de raciocínio matemático. Nestes últimos, a generalização e a justificação são apresentados como processos centrais do raciocínio matemático. Esta fundamentação aborda ainda em características das tarefas a propor que visam promover o raciocínio matemático dos alunos e nas ações que o professor realiza com o mesmo propósito.

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e concretiza-se numa investigação baseada em design, constituída por três ciclos de design. Em cada um dos ciclos de design um conjunto de princípios de design estrutura uma intervenção em sala de aula. O primeiro ciclo de design inclui uma intervenção no 8.º ano no tópico sequências. Os segundo e terceiro ciclos de design incluem uma intervenção no 7.º ano no tópico equações lineares. A recolha de dados inclui observação direta, recolha documental, entrevista e notas de campo. A análise de dados centra-se no raciocínio matemático, nomeadamente em generalizações e justificações, nas tarefas propostas e nas ações do professor nos momentos de discussão coletiva.

Os resultados do estudo salientam sequências de ações do professor estruturadas pelos princípios de design como promissoras para promover o raciocínio matemático dos alunos em momentos de discussão coletiva de tarefas de natureza exploratória. Particularmente, ações centrais de desafiar por parte do professor, na sequência de ações de convidar e complementadas por ações de apoiar e de guiar, geram oportunidades para que surjam generalizações e justificações de natureza distinta e com diferentes níveis de formalidade e complexidade. Deste estudo decorre um conjunto de princípios de design sobre tarefas e ações do professor que constituem uma conjetura sobre como promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

Palavras-chave: raciocínio matemático, ações do professor, generalização, justificação, investigação baseada em design.

Abstract

This study aims to understand how to enhance students' mathematical reasoning in the classroom. The theoretical framework considers mathematical reasoning, namely regarding kinds of inferences and regarding mathematical reasoning processes. In the latest, generalization and justification are presented as central mathematical reasoning processes. The framework also considers teacher's actions to enhance students' mathematical reasoning and the characteristics that a task should contemplate in order to attain the same enhancement.

The study follows a qualitative and interpretative approach and is implemented as a design-based research that comprises three design cycles. In each design cycle a set of design principles structures a classroom intervention. The first design cycle considers an intervention at grade 8 in the topic of sequences. The second and third cycles consider an intervention at grade 7 in the topic of linear equations. Data collection includes direct observation, documental collection, interview and researcher logbook. Data analysis focus on mathematical reasoning, namely generalizations and justifications, on proposed tasks and teacher's actions in whole-class discussions.

Results highlight sequences of teacher's actions structured by design principles as promising to enhance students' mathematical reasoning in whole-class discussions of exploratory tasks. Particularly, central challenging actions, in the aftermath of inviting actions and complemented by supporting and guiding actions, generate opportunities for generalizations and justifications to emerge with different nature and at different levels of formality and complexity. This study proposes a set of design principles about tasks and teacher's actions that form a conjecture about how to enhance students' mathematical reasoning in the classroom.

Keywords: mathematical reasoning, teacher's actions, generalization, justification, design-based research.

Preâmbulo

O meu percurso de investigação teve início acidentalmente. Inscrevi-me no Mestrado em Educação, na especialização em Didática da Matemática, com o intuito de melhorar a minha prática enquanto professora de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico. Mas, logo no final do 1.º semestre do mestrado, foi-me sugerida a inscrição no doutoramento. Assim, agradeço desde já ao Professor João Pedro da Ponte, por me ter lançado este e tantos outros desafios que estruturaram o meu percurso.

Decorrente deste desafio, o mestrado e o doutoramento sobrepuseram-se, o último ano letivo de um coincidiu com o primeiro do outro. Da mesma forma, a temática principal do estudo de ambos sobrepõe-se: o raciocínio matemático. Talvez por este motivo, chego a esta fase final do doutoramento e não sei, genuinamente, de quantas formas diferentes já disse e já escrevi que o raciocínio matemático é inegavelmente importante na Matemática. Mas continuo, inabalavelmente, a afirmá-lo. Sempre com o raciocínio matemático em vista, optei neste doutoramento por tentar compreender melhor o modo de o promover.

Por alinharem neste desafio de tentar promover o raciocínio matemático em sala de aula, quero agradecer, desde já, às duas professoras participantes desde estudo, por abrirem a sua sala de aula a esta investigação, pela incrível colaboração e pela preocupação genuína que ambas têm com a aprendizagem dos seus alunos.

Esta opção de compreender como promover o raciocínio dos alunos levou-me à temática das ações do professor. Mas o doutoramento permitiu-me muito mais do que centrar-me em novos focos de estudo. Todo este processo trouxe-me oportunidades únicas de integrar a comunidade da Educação Matemática e de compreender melhor a investigação. Destas oportunidades, quero destacar o projeto de investigação no qual estive diretamente envolvida, os seminários de doutoramento, os encontros nacionais e internacionais nos quais participei, e ainda o processo de publicação de artigos.

Participar no projeto P3M – Práticas dos Professores de Matemática foi, sem dúvida, uma ótima oportunidade para a minha formação. Primeiramente, pelo estudo da temática do projeto e consequentemente das ações do professor. Complementarmente, pela oportunidade de vivenciar a dinâmica de um projeto de investigação. Assim, agradeço a todos os membros deste projeto, pelas oportunidades de aprendizagem que me proporcionaram, bem como, e uma vez mais, ao Professor João Pedro, pela oportunidade de integrar este projeto de investigação.

Neste doutoramento, um dos aspetos que destaco como mais relevantes para a minha aprendizagem, são os seminários de doutoramento de discussão de trabalhos em curso. Estes seminários, além de possibilitarem a discussão da minha investigação com colegas e professores, possibilitaram também a discussão de trabalhos de colegas, permitindo-me ir construindo o que se entende por discutir um trabalho de investigação. Aqui, agradeço a todos os colegas e professores que, nestes seminários ou noutras situações de discussão, contribuíram para a minha aprendizagem ao longo deste doutoramento. Assim, o meu obrigado a todos os professores e colegas do Doutoramento em Didática da Matemática, pelas partilhas, pelas discussões, pelos comentários, pelas sugestões. E, em particular, um obrigado sincero a todos os que passaram pela sala E210, ou anteriormente pela sala 6.1.22. O ambiente de partilha e de boa disposição nestas salas foi imprescindível a esta minha perceção de que o doutoramento pode ser muito mais do que um processo individual e isolado.

Numa aceção semelhante à dos seminários de doutoramento, saliento também os encontros nacionais e internacionais que, pelas suas características e dinâmicas distintas, me permitiram discutir o meu e outros trabalhos de investigação na comunidade alargada da Educação Matemática. Os desafios para participar nestes encontros, quase sempre lançados pelo Professor João Pedro (mais uma vez obrigada), transformaram-se em ótimas oportunidades de aprendizagem.

Os seminários de doutoramento e alguns dos encontros permitiram-me ainda discutir o meu trabalho antes de o submeter para divulgação em revistas da área da Educação. Estas discussões prévias, assim como o processo de revisão dos artigos submetidos (particularmente dos que estruturam esta tese), contribuíram também em grande medida para a minha aprendizagem. Neste processo, reforço de novo o meu agradecimento ao Professor João Pedro, orientador e coautor, que tanto me fez refletir sobre a teorização, análise e apresentação e discussão dos resultados deste estudo.

Também coautora de artigos e comunicações, quero deixar o meu especial obrigado à Marisa que, além de colega de sala, me acompanhou, como colega e como amiga, ao longo de quase todo o doutoramento.

Ainda quanto aos artigos, quero também ressalvar que fazer uma tese por artigos foi um dos maiores desafios deste doutoramento. Pelo desafio que é a publicação de artigos em si mesma, mas também por ser um modelo pouco habitual na área da Didática da Matemática. Quanto a este desafio, quero deixar o meu muito muito obrigado à Helena e à Cristina, que, fazendo também a tese por artigos, me acompanharam na reta final. As nossas reuniões dos dias D (de discussão) sobre o *kappa* foram imensamente produtivas e motivadoras. E um obrigado ainda maior por me acompanharem nesta loucura de abreviarmos sucessivamente o prazo para entregarmos as teses.

Tudo o que aqui referi, foi fundamental para o meu doutoramento, mas não consigo aqui (ou em sítio algum) descrever tudo o que foi o processo de doutoramento. Aqui, agradeço novamente ao Professor João Pedro, que me desafiou a fazer o doutoramento e posteriormente a tese por artigos e que, à falta de melhores palavras, me acompanhou de uma forma inacreditável ao longo de todo o percurso. Muito obrigada.

E, porque o percurso de doutoramento é um percurso académico, mas também pessoal, agradeço a toda a família, particularmente pelos bons momentos de descontração. Agradeço particularmente aos meus filhos, Simão e Xavier, que fizeram com que o meu doutoramento fosse intervalado de licenças de maternidade, uma entre recolhas de dados e outra que me permitiu uma pausa antes da reta final para terminar os artigos e o *kappa* (não sei bem se pausa será o termo certo, atendendo a que terminei um dos artigos durante a licença, mas serviu-me para ganhar balanço). Assim, agradeço aos dois, por me animarem os momentos em família, dando-me fôlego para me concentrar nos momentos de trabalho. E, claro, um obrigado especial ao Manuel, que contribuiu também para esses momentos de fôlego, que é quem mais me acompanhou neste processo, que me apoiou ao longo de todo o percurso e que me pressionou em vários momentos críticos, ajudando-me a avançar.

Finalizo este preâmbulo retomando o meu interesse pelo raciocínio matemático. Pela minha curiosidade sobre a investigação nesta área, constatei que a preocupação em promover o raciocínio matemático dos alunos não é nova. No primeiro número de *The Mathematics Teacher*, Smith (1908) refere que "se existe um modo de obter dos alunos o raciocínio perfeito, eu ainda não o encontrei" (p. 10). 110 anos depois, diria que continuamos sem o encontrar, mas que estamos no bom caminho. Assim, neste doutoramento não procurei como obter o raciocínio perfeito, mas procurei contribuir para o conhecimento nesta temática. Fazê-lo foi (é) extraordinariamente desafiante, mas também extraordinariamente enriquecedor. (E irei, certamente, persistir neste desafio.)

Joana Mata-Pereira

Lisboa, 18 de junho de 2018

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

1 Apresentação do estudo

Estudar o raciocínio matemático

A importância do raciocínio matemático. A importância do raciocínio matemático na Matemática escolar é inegável. Contudo, se, por um lado, o senso comum remete para a necessidade de desenvolver o raciocínio matemático, por outro lado, o que se entende por raciocínio matemático ou como pode o professor promover o raciocínio matemático dos alunos são questões que merecem discussão e aprofundamento.

Esta importância dada ao raciocínio matemático deve-se essencialmente ao seu contributo para a aprendizagem da Matemática enquanto disciplina lógica e coerente, para a aprendizagem da Matemática com compreensão. O raciocínio matemático permite ir além da aplicação rotineira de procedimentos, levando a compreender porque estes funcionam, como podem ser utilizados e como interpretar os seus resultados (NCTM, 2009). Adicionalmente, permite aos alunos estabelecer e compreender relações entre diferentes ideias matemáticas, suprimindo a noção por vezes instituída de que a Matemática é um conjunto de ideias, factos e métodos isolados que apenas precisam de ser memorizados (Boaler, 2010).

Compreender o raciocínio dos alunos é necessário para que o professor desenvolva estratégias capazes de promover melhores aprendizagens e de contribuir para ultrapassar dificuldades dos alunos (Babai, Eidelman, & Stavy, 2012). Possibilitar aos alunos uma aprendizagem com compreensão implica que o professor crie situações propícias para promover o raciocínio matemático dos alunos, o que constitui um desafio interessante e essencial, que está longe de ser trivial (Arcavi, 2005). Ainda que alguns professores centrem a sua prática numa exploração ativa do conhecimento e ideias dos alunos com especial atenção ao seu raciocínio, muitos outros dão pouca atenção ao que se entende por raciocínio matemático dos alunos ou focam-se em aspetos muito limitados desse raciocínio (Cohen & Ball, 1999). Deste modo, e dada a importância do raciocínio matemático e de o promover em sala de aula, é necessário conhecer melhor como podem os professores ensinar os alunos a raciocinar, pois a investigação neste campo é ainda escassa (Boaler, 2010), e, a partir daí, oferecer oportunidades de formação aos professores sobre o raciocínio matemático dos alunos (Francisco & Maher, 2011).

O percurso de investigação. Este estudo surge na sequência da investigação que realizei no âmbito do Mestrado em Educação, na especialização em Didática da Matemática, centrado no raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações (Mata-Pereira, 2012). O principal objetivo desse estudo é compreender os processos de raciocínio matemático dos alunos. Nessa investigação, foco-me na generalização e justificação enquanto processos de raciocínio e na sua relação com as representações utilizadas pelos alunos e com os seus processos de significação. No entanto, o estudo do raciocínio matemático de alunos do 3.º ciclo não se esgota nos processos de generalização e justificação e respetivas representações e processos de significação, nem nos tópicos números reais e inequações.

Sendo este um estudo de continuidade face ao estudo anterior (Mata-Pereira, 2012), opto também nesta investigação por incidir em tópicos relacionados com o tema da Álgebra. Esta opção não pretende aprofundar o tema da Álgebra na sua relação com o raciocínio matemático, mas antes centrar-se em tópicos de um só tema da Matemática. Assim, o intuito é focar a atenção nos aspetos que se relacionam com os processos de raciocínio matemático dos alunos e não nas questões da aprendizagem dos tópicos considerados. A opção pelo tema da Álgebra prende-se essencialmente com dois motivos. O primeiro diz respeito ao meu interesse pessoal pela Álgebra, que me levou a selecionar este tema na investigação anterior e que me impulsiona a dar-lhe continuidade neste estudo. Selecionar tópicos relacionados com a Álgebra permite um aprofundamento do conhecimento do raciocínio matemático neste tema, tirando partido do estudo que já realizei neste domínio. O segundo motivo prende-se com a relação da Álgebra com o raciocínio matemático. Esta relação está patente no relevo dado ao pensamento algébrico na investigação em Educação Matemática. Por um lado, o raciocínio algébrico – enquanto raciocínio matemático em Álgebra – é uma componente central e fundamental do pensamento algébrico (Kaput, 2008). Por outro lado, o raciocínio algébrico é reconhecido como fortemente ligado à linguagem simbólica formal através da qual usualmente se expressa, ainda que seja redutor considerar que este raciocínio requer necessariamente o uso de linguagem simbólica formal (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 2001). Adicionalmente, um entendimento da Álgebra enquanto forma geral de pensamento matemático (ME, 2007) permite a sua integração noutros temas matemáticos como a Aritmética ou a Geometria (Kilpatrick & Izsák, 2008).

Ainda que relevante, o principal aspeto de continuidade face ao estudo anterior não é o tema da Álgebra, mas sim o raciocínio matemático dos alunos. Assim, e com o intuito de dar continuidade ao estudo realizado no mestrado, continuo a dar atenção ao raciocínio matemático dos alunos, mas agora focando-me em melhor compreender o modo de o promover. Na verdade, a compreensão de aspetos básicos dos processos de raciocínio matemático dos alunos, permite agora considerar a questão sobre como promover esse raciocínio matemático na sala de aula.

A relação com as tarefas e com as ações do professor. Assim, no estudo de doutoramento, procuro ir mais além nos contributos para promover o raciocínio matemático em sala de aula, aprofundando o estudo dos processos de raciocínio dos alunos, mas agora na sua relação com as tarefas propostas e com as ações do professor. A investigação em Educação Matemática salienta, por um lado, a resolução de problemas e tarefas de investigação como suscetíveis de contribuir para o raciocínio matemático dos alunos (e.g., Azevedo, 2009; Francisco & Maher, 2011; Henriques, 2010). Por outro lado, a investigação nesta área destaca algumas ações do professor que podem promover o raciocínio, como promover a discussão da resolução de tarefas (Cengiz, Kline, & Grant, 2011), apresentar oportunidades de exploração de ideias, de decisão e validação de argumentos matemáticos ou encorajar a explicitação de raciocínios (Francisco & Maher, 2011). Assim, promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula está intrinsecamente relacionado com as tarefas em que os alunos se envolvem e com as ações do professor, particularmente em momentos de discussão coletiva.

Objetivo e questões do estudo

No contexto acima apresentado, o presente estudo surge com o intuito de contribuir para o conhecimento sobre o modo de promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

O estudo de doutoramento concretiza-se numa investigação baseada em design (IBD) realizada no 3.º ciclo do ensino básico. Esta investigação tem por objetivo compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula. Atendendo a este objetivo, formulo um conjunto de questões de investigação que estruturam o trabalho desta investigação:

1. Como se caracterizam as generalizações e justificações de alunos do 3.º ciclo do ensino básico?

2. Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva para promover o raciocínio matemático dos alunos?

3. Que relações existem entre as tarefas propostas e ações do professor e as generalizações dos alunos que emergem nos momentos de discussão coletiva?

4. Que relações existem entre as tarefas propostas e ações do professor e as justificações dos alunos que emergem nos momentos de discussão coletiva?

***Kappa* e artigos**

Este estudo de doutoramento, sendo apresentado como um conjunto de trabalhos de investigação, engloba quatro artigos publicados ou aceites para publicação em revistas indexadas e o presente *kappa.* Este *kappa* pretende, por um lado, enquadrar o estudo quanto ao seu objetivo, problemática, quadro teórico de referência e metodologia e, por outro lado, discutir os resultados obtidos com o estudo e apresentar as suas conclusões.

Os artigos. Os artigos que suportam este estudo contribuem, no seu conjunto, para o objetivo de investigação. Assim, cada artigo concorre, em particular, para dar resposta a uma ou duas das questões de investigação e também, de um modo geral, para dar resposta às restantes questões.

Os artigos deste estudo são os seguintes (respetivamente, Anexos 1, 2, 3 e 4[1]):

I	Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, XXI*(2), 81-110.	*Indexado em:* *Qualis (B1)*
II	Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (*2018a*). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema, 32*(62). (aceite para publicação a 17/05/2018).	*Indexado em:* *Scopus* *Qualis (A1)*

[1] Estes artigos são referenciados no *kappa*, respetivamente, como Artigo I, Artigo II, Artigo III e Artigo IV, sendo a paginação a correspondente à versão dos autores disponível nos anexos.

III Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186.

Indexado em:
WoS
Scopus
Qualis (A1)

IV Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018b). Teacher's actions to promote students' justification. *Acta Scientiae*, *20*(3), 487-505.

Indexado em:
Qualis (A2)

A estrutura do *kappa*. O presente *kappa* encontra-se organizado em seis secções. Inicia-se por esta *Apresentação do estudo*, que dá a conhecer o enquadramento e objetivos do estudo. A secção que se segue, *Raciocínio matemático*, corresponde à fundamentação teórica e integra os principais constructos teóricos nos quais este estudo se baseia e que são estruturais ao longo de todo o estudo. Nesta secção abordo o raciocínio matemático em diversas vertentes, nomeadamente, tipos de inferências e processos de raciocínio matemático. Abordo ainda aspetos das tarefas que visam promover o raciocínio matemático dos alunos e das ações que o professor realiza com o mesmo propósito, destacando particularmente as que decorrem em momentos de discussão coletiva.

A secção *Considerações metodológicas* apresenta a IBD, detalhando as suas características e os princípios de design. Nesta secção apresento ainda os participantes do estudo, o modo como os dados foram recolhidos, o processo de análise de dados e refiro os princípios éticos inerentes ao estudo.

Na secção *Artigos* apresento um resumo de cada um dos quatro artigos onde refiro os aspetos mais salientes que contribuem para o estudo e para estruturar este *kappa*. Refiro ainda de que modo os artigos se articulam entre si e como se articulam com a IBD.

Nas duas secções finais, *Discussão* e *Conclusão*, discuto os resultados obtidos tendo por base os resultados apresentados nos quatro artigos e concluo com as ideias principais que se destacam neste estudo. Na secção *Conclusão* faço ainda um balanço sobre toda a investigação, apontando limitações e implicações do estudo, assim como ideias para investigação futura.

2 Raciocínio Matemático

Raciocínio matemático

O raciocínio matemático é, consensualmente, uma capacidade fundamental na aprendizagem da Matemática. Contudo, o seu significado está longe de ser consensual e o que se entende por raciocinar matematicamente nem sempre é claro ou evidente. Parte desta dificuldade em apresentar uma definição única do que se entende por raciocinar decorre dos usos variados que a palavra *raciocínio* tem noutros domínios do saber e da vida quotidiana. Mas mesmo considerando apenas o raciocínio em Matemática, a definição do que se entende por raciocinar matematicamente difere de autor para autor.

Explicita ou implicitamente, a maioria dos autores defende que raciocinar matematicamente é fazer inferências (e.g., Aliseda, 2003; Brousseau & Gibel, 2005; Oliveira, 2008; Pólya, 1954; Rivera & Becker, 2009). Parte dos autores identificam o raciocínio matemático apenas com a inferência de natureza dedutiva (e.g., Aliseda, 2003). Outros autores consideram também inferências de natureza indutiva ou abdutiva (e.g., Brousseau & Gibel, 2005; Rivera & Becker, 2009). Neste estudo, numa perspetiva abrangente, considero que raciocinar matematicamente é fazer inferências de forma justificada, seja indutiva, abdutiva ou dedutivamente.

Inferências indutivas, abdutivas e dedutivas. Como referi, raciocinar matematicamente é, para a grande maioria dos autores, partir de conhecimento prévio para obter conhecimento novo. O modo como decorre a passagem do conhecimento prévio para o conhecimento novo é o que mais difere nas várias definições de raciocínio matemático. Assim, raciocinar matematicamente pode passar por usar “um conjunto de processos mentais complexos” (Oliveira, 2008, p. 3) ou por uma linha de pensamento, baseada nalgum tipo de razões que o suportem, e que visa produzir afirmações ou obter conclusões (Lithner, 2008). Já Russel (1999) considera que raciocinar matematicamente envolve construir conhecimento matemático com base na “teia de conhecimento matemático” (p. 4) existente, contribuindo para as interconexões dessa mesma teia. Na perspetiva de Brousseau e Gibel (2005), o raciocínio matemático pode ser visto como a relação entre uma condição e uma consequência. Segundo os autores, esta relação pode ser uma regra ou algo que é reconhecido ou aceite no contexto da situação e que leva a tomar uma decisão ou a prever ou afirmar um facto. Estas perspetivas acomodam tanto aspetos lógicos como aspetos de natureza mais indutiva, dando lugar a inferências dedutivas, indutivas e abdutivas.

Nas inferências dedutivas, essencialmente caracterizadas por uma perspetiva lógica, há duas características consideradas centrais: (1) a certeza, referente à relação necessária entre as premissas e a conclusão, onde uma conclusão advém necessariamente de um conjunto de premissas e (2) a irrefutabilidade das conclusões, da qual decorre que não subsistam dúvidas quanto à validade das conclusões (Aliseda, 2003). As inferências dedutivas, identificáveis com a noção de Tarski de inferência lógica, são frequentemente apresentadas como o paradigma do raciocínio matemático (Aliseda, 2003) e como elemento estruturante do conhecimento matemático (Oliveira, 2002). Tipicamente, é uma inferência que se desenvolve do geral para o particular, com uma conclusão necessária que pretende validar ou refutar algo. Ao ser identificada pelas suas características lógicas e formais, pretende-se que seja completamente certa (Aliseda, 2003), produzindo conclusões válidas que tornam o conhecimento matemático estruturado e inabalável (Oliveira, 2002). Deste modo, pela sua função de validação, as inferências dedutivas são centrais na atividade matemática. No entanto, as inferências dedutivas, muitas vezes associadas à demonstração matemática e à Matemática formal, podem não explicar alguns raciocínios matemáticos. Neste sentido, o raciocínio dedutivo, tal como outras capacidades matemáticas, deve ser desenvolvido progressivamente, valorizando primeiramente as suas configurações mais informais (Oliveira, 2002) e, por vezes, incorretas (Lithner, 2008).

Contudo, importa referir que o raciocínio matemático não é necessariamente baseado em aspetos dedutivos (Lithner, 2008). Existem outras formas rigorosas de raciocinar, como é o caso das inferências indutivas e das inferências abdutivas (Rivera & Becker, 2009), ainda que não permitam a mesma certeza e irrefutabilidade que as inferências dedutivas (Aliseda, 2003). Estas inferências – indutivas e abdutivas – são mais características em discussões em áreas como a filosofia da ciência ou, mais recentemente a inteligência artificial, sendo menos evidentes nas discussões sobre Matemática (Aliseda, 2003). No entanto, estas inferências, mesmo sendo muitas vezes desvalorizadas pela hegemonia da demonstração em Matemática, são muitas vezes utilizadas pelos próprios matemáticos, com o intuito de procurar compreensão e significação em detrimento de rigor e formalidade (Brodie, 2010).

Russel (1999) destaca que raciocinar matematicamente consiste em pensar sobre propriedades de um objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a uma classe alargada de objetos, reforçando assim a vertente indutiva do raciocínio matemático já defendida por Pólya (1954). Também Galbrait (1995), numa perspetiva eminentemente indutiva, defende que a capacidade de raciocinar matematicamente advém de perceções que decorrem da exploração de conceitos e ideias matemáticas a um nível prático e intuitivo. Este raciocínio ocorre essencialmente quando se fazem previsões ou se formulam conjeturas (Aliseda, 2003), estando também associado à generalização a partir da identificação de uma determinada característica comum a vários casos (Rivera & Becker, 2009). Assim, é o raciocínio indutivo que possibilita desenvolver conjeturas e generalizações que podem posteriormente ser verificadas por processos de demonstração eminentemente dedutivos como a indução matemática (Pólya, 1954).

O papel do raciocínio abdutivo é principalmente explicativo, ainda que, tal como o raciocínio indutivo, tenha uma componente de construção de conhecimento. Assim, o raciocínio abdutivo tem por objetivo construir hipóteses para fenómenos desconhecidos, ou seja, de um modo geral, é um raciocínio utilizado para explicar algo intrigante (Aliseda, 2003). Neste sentido, o raciocínio abdutivo é identificável com a formulação de uma generalização partindo de relações entre diversos aspetos de uma determinada situação (Rivera & Becker, 2009). As conclusões do raciocínio abdutivo são, assim, conclusões plausíveis no contexto da situação em questão (Oliveira, 2002; Rivera & Becker, 2009).

Deste modo, paralelamente às inferências dedutivas, as inferências indutivas e abdutivas são parte integrante e essencial do raciocínio matemático.

Processos de raciocínio matemático

Dada a sua natureza complexa, raciocinar matematicamente envolve uma variedade de processos que se evidenciam no pensamento e significação individuais do aluno, no seu trabalho em sala de aula e nas interações decorrentes de discussões coletivas (Brodie, 2010). Estes processos incluem formular questões e estratégias de resolução, formular e testar generalizações e outras conjeturas, e a sua justificação. Destes, destaca-se a generalização e a justificação como processos-chave do raciocínio matemático. Generalizar, por envolver afirmar que uma ideia, propriedade ou procedimento é válido para um conjunto alargado de objetos (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008) ou afirmar que uma propriedade é comum a um grupo de objetos (Dörfler, 1991), é a base de muitas ideias e conceitos matemáticos. Por este motivo, é fundamental envolver os alunos em atividades de generalizar, pelas suas potencialidades para a aprendizagem matemática (Kieran, 2007). Contudo, é importante salientar que, na sala de aula, as generalizações podem ser incorretas ou apresentadas apenas de modo implícito (Becker & Rivera, 2005; Reid, 2002). Adicionalmente, enfatizar o raciocínio matemático na sala de aula passa também por criar situações em que a justificação é um aspeto central da atividade dos alunos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). Justificar uma afirmação ou um resultado envolve apresentar razões que convençam o próprio e também os outros (Sowder & Harel, 1998). Pretende-se ainda que estas razões se baseiem em conceitos, propriedades, procedimentos e ideias matemáticas. A justificação emerge, assim, como um processo essencial para a validação do conhecimento matemático. Deste modo, o raciocínio matemático é "essencialmente sobre formular, justificar e usar generalizações matemáticas" (Russel, 1999, p. 1).

Generalização. Conjeturar consiste em fazer afirmações que se pretendem verdadeiras, mas que não se conhecem como tal (Lannin et al., 2011). Assim, a generalização, enquanto processo de raciocínio matemático, é frequentemente uma conjetura com características específicas. No seu dia-a-dia, os alunos estão naturalmente predispostos para fazer generalizações (Becker & Rivera, 2005). Contudo, estas generalizações surgem maioritariamente de forma imediata e baseadas em analogias, na identificação de padrões partindo de exemplos ou na experimentação de casos isolados ou não sistematizados (Henriques, 2010). Deste modo, promover o raciocínio matemático dos alunos, passa por criar situações em que a generalização assume um papel central (Kieran, 2007), com o intuito de levar os alunos a apresentar generalizações baseadas em ideias, conceitos e propriedades matemáticas.

No entanto, o que se entende por generalização difere consideravelmente na Matemática enquanto ciência e na Matemática escolar. Em Matemática, uma generalização – frequentemente referida como teorema – apenas é considerada verdadeira se lhe for associada uma demonstração válida (para os matemáticos). Já na Matemática escolar, a validade, como refere Carraher et al. (2008), de uma generalização não depende de uma demonstração matematicamente válida, mas da consideração de fatores como o uso que os alunos dão às notações e procedimentos convencionais ou o modo como representam e analisam as situações que lhes são apresentadas. De acordo com estes autores, os alunos consideram como válidos os fundamentos das suas afirmações e reconhecem que o que os leva a tirar conclusões e a fazer generalizações pode não estar de acordo com o que é aceite pela comunidade Matemática. Estas diferenças entre os entendimentos de generalização na Matemática e na Matemática escolar podem gerar situações de confusão para os alunos, que, por vezes, parecem não compreender a utilidade do processo de generalização enquanto estrutura para o desenvolvimento de conceitos, propriedades ou ideias matemáticas, encarando-o "como um simples processo de formalização" (Henriques, 2010, p. 392). Usar a generalização de um modo matematicamente útil torna-se, assim, uma tarefa desafiante para muitos alunos (Zazkis, Liljedahl, & Chernoff, 2008).

As generalizações que os alunos apresentam ou usam em sala de aula podem decorrer de diferentes abordagens e a diferentes níveis. Carraher et al. (2008) distinguem entre generalizações de natureza empírica e generalizações de natureza teórica. As primeiras são aquelas que surgem da análise direta dos dados com o intuito de destacar tendências e regularidades. Na formulação destas generalizações, os alunos baseiam-se em casos particulares. As generalizações teóricas são aquelas que advêm da atribuição de modelos que representem os dados observados. Numa aceção semelhante, Galbrait (1995) distingue os alunos que formulam generalizações utilizando uma abordagem empírica e os que generalizam baseando-se em abordagens dedutivas. Nos que seguem uma abordagem empírica, o autor distingue aqueles que selecionam casos particulares aleatória e arbitrariamente e aqueles cuja escolha de casos particulares é guiada por uma "perceção do domínio da conjetura que está a ser examinada" (Galbraith, 1995, p. 415). Quanto aos alunos que tendem a seguir abordagens de natureza dedutiva, tendem a referir conceitos e ideias matemáticas a um nível de generalidade que vai além do contexto imediato. De acordo com este autor, os alunos que seguem abordagens dedutivas envolvem-se em três etapas distintas, sendo que em qualquer uma podem ocorrer falhas ou erros: (i) reconhecer a relevância de conceitos ou ideias matemáticas centrais na situação, (ii) identificar de que modo esses conceitos ou ideias são úteis para a situação e (iii) aplicar tais conceitos ou ideias apropriadamente à situação em questão. Para desenvolver a capacidade de formular generalizações, tanto em abordagens empíricas como dedutivas, os alunos devem agir a três níveis: (i) formular generalizações sobre problemas em que podem identificar regularidades e encontrar relações e estruturas; (ii) formular as mesmas generalizações, mas com o uso da linguagem algébrica; e (iii) formular generalizações pela reflexão sobre expressões algébricas que eles próprios produziram ou foram produzidas por outros (Carraher et al., 2008). A importância destes três níveis de generalização associa-se ainda aos três tipos de generalização identificados por Radford (2003): factual, contextual e simbólica. A generalização factual advém da observação empírica ou de casos particulares que são aplicados a novos casos num mesmo conjunto de objetos matemáticos, surgindo ao nível de generalização (i). A generalização contextual, também baseada na observação empírica ou casos particulares, pressupõe um alargamento a um novo conjunto de objetos matemáticos, surgindo também ao nível de generalização (i) e, eventualmente, ao nível de generalização (iii). A generalização simbólica é aquela cuja formulação envolve a utilização e compreensão da linguagem simbólica, ocorrendo nos níveis de generalização (ii) e (iii). Torna-se, portanto, essencial promover a generalização a diferentes níveis, discutindo-as com o professor e com os colegas, com o objetivo de os alunos se tornarem competentes no uso adequado dos raciocínios indutivo, abdutivo e dedutivo (NCTM, 2007).

Justificação. Os alunos tendem a aceitar conjeturas e generalizações como sendo válidas, sem sentirem a necessidade de as justificar (Harel & Sowder, 2007, Henriques, 2010). Mesmo quando justificam, focam-se essencialmente no que lhes é familiar ou em ideias que recordam vagamente, sem tomar atenção às propriedades matemáticas envolvidas (Lithner, 2000, 2008). No entanto, a justificação permite aos alunos evidenciar e esclarecer o seu conhecimento matemático (NCTM, 2007), nomeadamente estabelecer conexões entre conceitos matemáticos, representações e procedimentos, resolver problemas e desenvolver novas ideias matemáticas (Brodie, 2010). Assim, é importante que os alunos compreendam a necessidade de justificar desde cedo no seu percurso escolar (NCTM, 2007), sustentando as suas justificações em propriedades, procedimentos e ideias matemáticas (Lannin et al., 2011).

Contudo, envolver os alunos em justificações próximas da demonstração matemática formal pode não ser adequado ao desenvolvimento dos alunos (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014). Assim, nalgumas situações, as justificações baseadas em casos particulares podem ser particularmente úteis se os alunos não têm as ferramentas necessárias para justificar com uma abordagem mais dedutiva (Lannin et al., 2011). Adicionalmente, as justificações baseadas em casos particulares podem ser consideradas como apropriadas quando estes casos pretendem ser representativos de uma classe mais alargada de objetos matemáticos (Sowder & Harel, 1998). Ainda que as justificações empíricas possam ser consideradas como válidas atendendo ao conhecimento da turma, importa salvaguardar que estas justificações não são equivalentes nem substituem a demonstração matemática (Stylianides & Stylianides, 2009). Neste sentido, é essencial discutir com os alunos a validade matemática das justificações apresentadas, para que compreendam o que pode validar uma justificação (NCTM, 2007), rejeitando justificações baseadas na autoridade, perceção da situação, senso comum ou casos particulares (quando estes não são suficientes para justificar apropriadamente) (Lannin et al., 2011). Conforme progridem no seu percurso escolar, a perceção sobre o que valida ou invalida uma justificação deve promover justificações cada vez mais formais, muitas vezes próximas ou equivalentes a demonstrações matemáticas.

Ainda que se pretenda que os alunos apresentem justificações baseadas em pressupostos matemáticos, nem todas as justificações apresentadas em sala de aula têm uma natureza puramente matemática. Na verdade, a justificação, por ser um conceito abrangente, engloba classificações de diferentes tipos e de diferentes naturezas. Um contributo para compreender as justificações dos alunos em sala de aula passa por considerar os seus níveis de formalidade e de complexidade (Figura 1). Importa salvaguardar que, em qualquer um destes níveis, a justificação pode ainda ser considerada correta, parcialmente correta ou incorreta.

Tipos crescentes de formalidade →

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>0</td><td colspan="3">Não justificar</td></tr>
<tr><td rowspan="5">A
Não formal</td><td rowspan="5">B
Formal mas incompleta</td><td rowspan="5">C
Formal</td><td>1</td><td colspan="3">Autoridade externa</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Evidência empírica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>3A</td><td>3B</td><td>3C</td></tr>
<tr><td>Coerência lógica</td><td>Exemplo genérico</td><td>Procedimento ou propriedade</td></tr>
<tr><td colspan="3">Justificação dedutiva</td></tr>
</table>

Níveis crescentes de complexidade ↓

Figura 1. Tipos de formalidade e níveis de complexidade da justificação.

Brousseau e Gibel (2005) identificam três tipos distintos de formalidade do raciocínio que se identificam no processo de justificação: Tipo A – justificação que não é apresentada formalmente, mas que pode ser atribuída às ações do aluno enquanto modelo da sua ação; Tipo B – justificação incompleta do ponto de vista formal, com inferências baseadas apenas implicitamente em elementos da situação ou conhecimento considerado partilhado; e Tipo C – justificação formal completa, baseada numa sequência de inferências conexas, com referência explícita a elementos da situação ou a conhecimento considerado partilhado. O conceito de justificação formal implícito nestes três níveis não corresponde necessariamente à justificação matematicamente formal associada à demonstração matemática (Stylianides, 2007a), mas ao que se entende por formal de acordo com a situação, nomeadamente com o ano de escolaridade e o conhecimento dos alunos. Ainda que dependa grandemente da situação, a justificação de tipo C ocorre principalmente em situações de validação, a justificação de tipo B em situações de formulação e a justificação de tipo A em situações em que o aluno não utiliza conscientemente ou explicitamente um processo de justificação (Brousseau & Gibel, 2005). Numa aceção transversal a estes tipos de justificação, e com base no trabalho de Balacheff (1988), Sowder e Harel (1998), Lannin (2005) e Carraher, Martinez e Schliemann (2008), a classificação de justificações quanto ao seu nível de complexidade considera: Nível 0 – *não justificar,* se as justificações dos alunos não incluem uma justificação; Nível 1 – *autoridade externa*, se as justificações dos alunos se baseiam noutra pessoa ou materiais de referência; Nível 2 – *evidência empírica,* se a justificação se baseia em casos particulares; Nível 3 – *justificação dedutiva*, se a justificação tem uma natureza dedutiva. As justificações dedutivas (Nível 3) consideram ainda uma distinção entre: Nível 3A – *coerência lógica,* se uma justificação se baseia em princípios lógicos; Nível 3B – *exemplo genérico,* se uma justificação é dedutiva, mas formulada considerando um exemplo ou caso particular; Nível 3C – *procedimento ou propriedade*, se uma justificação se baseia em argumentos dedutivos independentes de casos particulares ou exemplos. Estes três níveis, pertencendo todos ao nível de justificação dedutiva, têm igual nível de complexidade.

As justificações de nível 1 podem basear-se numa autoridade, em hábitos ou em símbolos matemáticos (Sowder & Harel, 1998). Numa justificação baseada numa autoridade, o aluno pode justificar com base no manual, numa afirmação do professor, em colegas considerados como tendo um melhor desempenho ou mesmo em argumentos sociais (Harel & Rabin, 2010). Já nas justificações baseadas em hábitos, os alunos focam-se na estrutura do argumento e não no seu conteúdo. Por fim, nas justificações baseadas em símbolos matemáticos, estes símbolos são considerados como válidos por si mesmos, independentemente do seu significado ou da relação com a situação. Um exemplo destas justificações é a utilização inapropriada do sinal de igual na resolução de equações, por exemplo, apresentando $4x + 2 = 6$ como equivalente a $4x = 6 - 2 = 4 : 4 = 1$, ainda que concluindo corretamente que $x = 1$.

Quanto às justificações de nível 2, baseadas em evidências empíricas, é possível distinguir entre justificações percetuais, justificações baseadas em exemplos (Sowder & Harel, 1998) e justificações baseadas em exemplos cruciais (Balacheff, 1988). As justificações percetuais baseiam-se numa perceção da situação, sendo muitas vezes baseadas em esquemas ou desenhos. Já as justificações baseadas em exemplos, baseiam-se em casos particulares referentes a uma dada situação. Estas últimas são denominadas por Balacheff (1988) por empirismo ingénuo e este nível de justificação pode ser considerado uma forma de resistência à generalização. Nestas justificações, os alunos validam muitas vezes uma generalização com base apenas numa experimentação ingénua (Stylianides & Stylianides, 2009) ou afirmam que é uma generalização justificando que funciona para todos os casos que testaram (Galbrait, 1995; Knuth, Chopin, & Bieda, 2009). No entanto, é relevante que os alunos compreendam que o teste não exaustivo de casos particulares não constitui uma justificação matematicamente válida para uma generalização abrangente, ainda que tal justificação possa ser suficiente para os convencer da validade da afirmação (Coffland, 2012). Nas justificações baseadas em exemplos cruciais, os exemplos são selecionados tendo em vista optar entre duas hipóteses, a estratégia é projetada de modo a que o resultado seja claramente distinto caso se trate de uma ou da outra hipótese (Balacheff, 1988). Nestas justificações, o uso de exemplos cruciais, definidos por características ou factos conhecidos da situação, pode validar uma generalização (Stylianides & Stylianides, 2009).

As justificações de nível 3, tendo uma natureza dedutiva, tanto podem ser não-empíricas como considerar um exemplo como elemento representativo de uma classe de objetos matemáticos e não como um caso particular. As justificações a este nível de complexidade são frequentemente parte da demonstração matemática que lhe está associada. Particularmente, apresentar argumentos dedutivos pode ser aceite como demonstração, "ainda que parte da formalidade possa estar ausente" (Yopp & Ellsworth, 2016, p. 286). Apresentar justificações a este nível de complexidade pode ser representativo de um reconhecimento de argumentos empíricos como sendo meios dúbios para validar uma afirmação matemática (Stylianides & Stylianides, 2009).

A este nível, as justificações subdividem-se entre as que decorrem da coerência lógica (3A), as que se baseiam em exemplos genéricos (3B) e as que se baseiam em procedimentos ou propriedades matemáticas (3C). As justificações baseadas na coerência lógica, também denominadas justificações analíticas de natureza axiomática (Sowder & Harel, 1998), consideram a Matemática como um corpo de conhecimentos que pode ser organizado de modo a que novos resultados sejam consequências lógicas de resultados anteriores. Estas justificações tendem, assim, a basear-se em princípios lógicos mais que em procedimentos matemáticos (Schliemann, Lessa, Lima, & Siqueira, 2003). Um caso particular de justificações desta natureza são as justificações baseadas em contraexemplos que refutam uma afirmação, ou seja, exemplos que satisfazem as condições dadas e viola as conclusões visadas. Quanto a estas últimas justificações, Galbrait (1995) refere que os alunos têm muitas vezes dificuldades em compreender as características do exemplo a selecionar, nomeadamente por dificuldade em distinguir as condições dadas da conclusão a refutar, por dificuldade em aceitar que um só caso particular possa ser suficiente para refutar uma afirmação, ou por não compreenderem que o caso particular a selecionar deve satisfazer as condições dadas e contrariar a conclusão afirmada. As justificações baseadas num exemplo genérico (nível 3B), também referidas como justificações analíticas de natureza transformacional (Sowder & Harel, 1998), focam-se em aspetos gerais de uma dada situação particular e podem envolver outros processos de raciocínio como generalizar. Já as justificações baseadas em procedimentos ou propriedades matemáticas (nível 3C) pretendem tornar explícitas as razões pelas quais se valida uma afirmação, seja por operações ou transformações num objeto que não se considera como o objeto em si mas como um representante da classe de objetos (Balacheff, 1988), seja com base nas propriedades, definições, pressupostos e teoremas matemáticos (Bergqvist, 2005).

Atendendo a que se aprende a raciocinar "raciocinando e analisando os raciocínios realizados" (Ponte & Sousa, 2010, p. 32), é importante que os alunos tenham oportunidades de justificar as suas respostas a vários níveis de formalidade de complexidade.

Promover o raciocínio matemático na sala de aula

Tarefas. No ensino da Matemática, e, particularmente, para promover o raciocínio matemático dos alunos, um dos aspetos centrais para o sucesso dos alunos são as tarefas a propor (Brodie, 2010; Christiansen & Walther, 1986). Boavida et al. (2008) sugerem tarefas que facilitem o envolvimento dos alunos em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, ou seja, tarefas que promovam a resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação. Estas tarefas visam, de acordo com as autoras, uma visão global da Matemática que se baseia em compreender os conceitos e em promover o raciocínio matemático. Complementarmente, Brodie (2010) refere que as tarefas a propor devem considerar representações e resultados diversos que possam culminar em desacordos e desafios, ou tarefas que permitam aos alunos investigar, conjeturar e justificar.

Quanto à natureza das tarefas, vários estudos identificam a resolução de problemas e as tarefas de exploração e investigação como promissoras para promover o raciocínio matemático dos alunos (e.g., Azevedo, 2009; Francisco & Maher, 2011; Henriques, 2010; Ponte & Quaresma, 2016). Destas tarefas, destacam-se particularmente as tarefas de exploração, no entendimento dado por Ponte (2005, 2007), como centrais para promover processos de raciocínio matemático como a generalização e a justificação. Neste sentido, Azevedo (2009) destaca que a resolução de tarefas desta natureza promove a formulação, teste e justificação de generalizações e Henriques (2010) reforça ainda que estas tarefas levam os alunos a compreender a necessidade de justificar as conjeturas que pensam ser verdadeiras.

Quanto ao nível de exigência das tarefas a propor aos alunos, nem todas as tarefas devem ser de nível elevado (Brodie, 2010). Manter todas as tarefas propostas com um elevado nível de exigência, além de não ser exequível em períodos limitados de tempo, pode promover desmotivação e desinteresse por parte de muitos alunos (Brodie, 2010). Deste modo, o nível de desafio de uma tarefa deve ser considerado na sua construção, atendendo aos alunos a que tarefa é proposta. Por um lado, é desejável que sejam propostas aos alunos tarefas desafiantes, pois tal desafio incita o raciocínio matemático. Por outro lado, é igualmente importante que sejam propostas tarefas com um nível de desafio baixo, em situações que permitam a consolidação de propriedades e conceitos matemáticos e em situações que visem um envolvimento fácil na atividade de sala de aula. Assim, a articulação entre tarefas com diferentes níveis de exigência e de desafio é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Contudo, ainda que se possam construir ou propor as mais variadas tarefas aos alunos, não existe uma garantia irrefutável da sua utilidade para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Os alunos apresentam muitas vezes dificuldades em responder a tarefas que envolvem o raciocínio matemático por não terem por hábito realizar tarefas exploratórias e explorar situações matemáticas (Brodie, 2010). Contudo, tarefas de natureza exploratória podem promover "uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação" (Henriques, 2010, p. 373), incentivando alterações positivas nas atitudes dos alunos face à Matemática e promovendo o seu raciocínio matemático. Assim, é importante persistir no desafio de propor tarefas de exploração e de resolução de problemas, pois estas tarefas podem constituir um meio promissor para promover o raciocínio matemático dos alunos.

Ações do professor. Não desconsiderando a sua importância, por si mesmas as tarefas podem não ser suficientes para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ball & Bass, 2003). Assim, para além dos tipos de tarefas em que os alunos se envolvem, para promover o seu raciocínio matemático é igualmente relevante o modo como podem ser usadas em sala de aula, nomeadamente, o modo como os alunos se envolvem nessas tarefas e as interações que essas tarefas podem desencadear (Brodie, 2010). Neste contexto, e atendendo à complexidade da prática profissional do professor, um aspeto fundamental a considerar são as ações do professor. Estas ações, que têm origem nos motivos do professor que visam uma determinada atividade de sala de aula (Christiansen & Walther, 1986), são fundamentais para que essa atividade decorra. No entanto, se já a seleção de tarefas a propor é desafiante e não trivial, as abordagens de ensino e consequentes ações do professor que visam promover o raciocínio são igualmente ou mais desafiantes e nem sempre são fáceis ou bem compreendidas (Boaler, 2010). Por um lado, se o professor apresenta muitas sugestões ou informações aos alunos, a tarefa é simplificada e não apoia o raciocínio matemático dos alunos. Por outro lado, se o professor não acompanha o trabalho dos alunos durante a resolução da tarefa, pode não disponibilizar o apoio necessário para potenciar o raciocínio matemático dos alunos (Brodie, 2010).

Ações do professor nos momentos de discussão coletiva. As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula devem acompanhar os vários momentos da aula. No entanto, em aulas marcadas pelo ensino exploratório (Ruthven, 1989), são os momentos de discussão coletiva que se destacam como promissores para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ponte, 2005). Parte das ações que o professor deve empreender nos momentos de discussão coletiva não diferem significativamente das suas ações noutros momentos, como o momento de trabalho autónomo por parte dos alunos. Estas ações comuns a vários momentos da aula estão essencialmente associadas ao questionamento.

Para promover o raciocínio matemático dos alunos, o professor deve utilizar o questionamento, mas evitar dar demasiadas indicações para a resolução de tarefas, tentando apoiar o raciocínio e o trabalho do aluno (NCTM, 2009). O professor deve assim evitar responder a questões dos alunos maioritariamente com indicações de como resolver uma tarefa ou referindo a validade de uma ação do aluno, ou guiar os alunos no sentido de optarem pela abordagem que mais agrada ao próprio professor (Harel & Rabin, 2010). Neste sentido, o professor deve "pedir aos alunos que reformulem o problema usando as suas próprias palavras" e "colocar questões aos alunos que promovam o aprofundamento do seu pensamento, por exemplo, 'porque é que isso funciona?' ou 'como é que sabes?'" (NCTM, 2009, p. 11). Complementarmente, Ponte e Serrazina (2000) indicam que o questionamento deve ser suportado por questões variadas, nomeadamente, de focalização, confirmação e inquirição. As questões de focalização têm por objetivo levar o aluno a seguir um determinado percurso de raciocínio. As questões de confirmação são questões para as quais o professor sabe antecipadamente a resposta, pretendendo apenas verificar os conhecimentos do aluno. As questões de inquirição procuram levar o aluno a raciocinar e explicitar o seu raciocínio, incentivando-o a comunicar e a esclarecer o professor. Assim, o questionamento por parte do professor, nos moldes aqui apresentados, é particularmente relevante tanto durante a resolução das tarefas como nos momentos de discussão da tarefa. Importa ainda destacar que os alunos tendem a esperar certos tipos de perguntas por parte do professor (Brodie, 2010), assim, se o professor questiona habitualmente os alunos de um modo mais provocatório, os alunos encontram-se predispostos a responder de modo mais complexo e recorrendo a processos de raciocínio.

Nos momentos de discussão coletiva, além do questionamento, o professor pode ainda centrar a sua prática noutras ações que visam a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio matemático. Para tal, é importante que o professor promova discussões coletivas onde os alunos tenham oportunidades para explorar, apresentar, discutir e avaliar as suas ideias e as dos seus colegas (Ball & Bass, 2003), criando um ambiente favorável para que ocorram processos de raciocínio matemático. Nestas discussões, o professor deve incentivar os alunos a ouvir os colegas, a desafiar as ideias dos colegas solicitando justificações, a construir sobre ideias já apresentadas por outros e ainda a partilhar as suas ideias e várias versões do seu raciocínio (Brodie, 2010). É também importante que o professor valorize contributos em que os alunos explicitem o "porquê" das suas respostas, indo além da mera apresentação de resultados (Sowder & Harel, 1998). Particularmente, é essencial que, por um lado, as contribuições incorretas e parciais dos alunos sejam valorizadas e integradas e que, por outro lado, as contribuições corretas sejam exploradas no sentido de as aprofundar (Brodie, 2010). Harel e Rabin (2010) e Wood (1999) salientam ainda que o professor deve promover situações de desacordo entre os alunos, atendendo a que estas situações têm potencialidades para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Contudo, o professor não deve ser o único a arbitrar os desacordos entre os alunos, correndo o risco de os demover de discutir e resolver esses desacordos (Harel & Rabin, 2010).

Importa destacar que, ao solicitar a participação dos alunos, o professor pode deparar-se com uma variedade de respostas e tem de ser capaz de as utilizar para guiar a turma para uma compreensão mais efetiva da Matemática envolvida (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Para tal, uma só ação tende a ser insuficiente para compreender em detalhe o raciocínio matemático dos alunos, sendo necessária uma sequência de ações para que os alunos apresentem as suas ideias (Franke et al., 2009). Estas sequências de ações podem envolver solicitar a participação dos alunos, orientar ou focar os alunos com o intuito de esclarecer ou detalhar disponibilizando nova informação e desafiar os alunos (Kosko, Rougee, & Herbst, 2014; Krussel, Edwards, & Springer, 2004). Numa aceção semelhante, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), sugerem um modelo para as ações do professor nos momentos de discussão coletiva, que relaciona as ações do professor com os processos matemáticos envolvidos, nomeadamente, o raciocínio matemático (Figura 2).

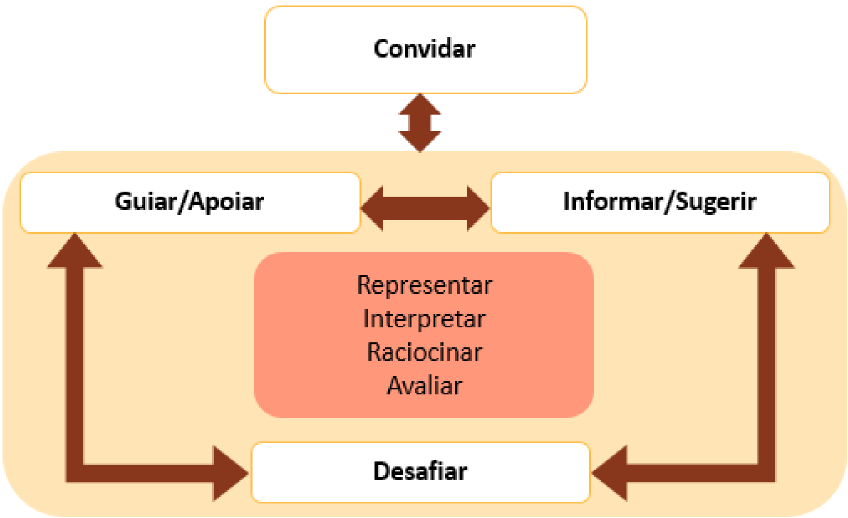


Figura 2. Ações do professor nos momentos de discussão coletiva (Adaptado de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma, 2013)

Assim, quanto às ações do professor nos momentos de discussão coletiva diretamente relacionadas com os processos matemáticos, distinguem entre convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar são, geralmente as que dão início à discussão coletiva ou a um segmento desta discussão, onde o professor incentiva os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções. No decorrer da discussão o professor recorre essencialmente aos restantes três tipos de ações, centrais na condução das discussões matemáticas que visam a aprendizagem por parte dos alunos. Nas ações de informar/sugerir o professor disponibiliza informação aos alunos ou valida as suas afirmações, enquanto nas ações de apoiar/guiar conduz os alunos a apresentar informação. Já nas ações de desafiar, os alunos são incentivados a ir além do seu conhecimento prévio. Nestes três tipos de ações centrais na discussão, os autores consideram ainda diversos processos matemáticos envolvidos, não necessariamente disjuntos: (i) representar, que inclui fornecer, redizer, usar ou alterar uma representação (incluindo procedimentos), (ii) interpretar, que inclui interpretar um enunciado ou uma ideia e fazer conexões, (iii) raciocinar, que inclui levantar questões sobre uma afirmação ou justificação, generalizar um procedimento, um conceito ou uma propriedade, justificar e apresentar argumentos e (iv) avaliar, que inclui avaliar um método ou uma resolução e comparar diferentes métodos.

Deste modo, conduzir discussões matemáticas em sala de aula é particularmente complexo e o professor tem de apoiar tanto o conteúdo da discussão como a gestão da sala de aula e da própria discussão. Particularmente, o professor tem de articular as ideias que emergem na discussão, assim como garantir que as ideias matemáticas fundamentais são o foco da atividade de sala de aula (Sherin, 2002), estabelecendo conexões entre as respostas dos alunos e o significado dos conceitos e ideias matemáticas em questão (Brodie, 2010). Ainda que estas discussões se revistam de alguma imprevisibilidade, o planeamento destas situações é fundamental, pois permite ao professor estabelecer objetivos claros para os momentos de discussão coletiva que podem ampliar a exploração das tarefas à formulação de novas questões ou conduzir a novas tarefas também estas promotoras do raciocínio matemático (Henriques, 2010).

Ações do professor para promover processos de raciocínio matemático. Além das ações do professor transversais aos momentos de discussão coletiva, são também necessárias, nestes mesmos momentos de discussão, ações do professor particularmente direcionadas para os processos de raciocínio matemático, nomeadamente, a generalização e a justificação. Neste sentido, Ellis (2011) aponta algumas ações que têm um papel central no apoio à generalização, nomeadamente, promover situações em sala de aula que levem os alunos a generalizar publicamente, a construir sobre ideias ou generalizações e a centrar a atenção dos alunos em relações matemáticas que possam desencadear generalizações. Além destas ações, quando, nos momentos de discussão coletiva, os alunos se envolvem explicitamente na apresentação e discussão de generalizações e justificações, desenvolvem um conhecimento mais abrangente dos aspetos matemáticos da situação (Kosko et al., 2004). Assim, ações do professor que visam especificamente generalizações e justificações têm potencial para promover o raciocínio matemático dos alunos.

Tipicamente, uma das dificuldades do professor em sala de aula é ensinar processos de raciocínio matemático mais formais, como a justificação formal ou a demonstração (Galbrait, 1995). Na abordagem à demonstração em sala de aula, o professor tende a discutir demonstrações completas, a indicar quais os aspetos lógicos a considerar e propor que a justificação seja feita pelos alunos, a fazer o próprio professor a demonstração ou a levar os alunos a fazer uma demonstração que usa uma sequência lógica idêntica a uma demonstração que fez anteriormente (Galbrait, 1995). Esta abordagem, em muito semelhante a uma abordagem em que o professor inicia a aula com uma regra geral, continua com exemplos que ilustrem essa regra e termina com tarefas semelhantes aos exemplos apresentados, tende a incitar os alunos a utilizarem justificações baseadas na autoridade (Harel & Rabin, 2010). No entanto, uma abordagem à justificação como atividade coletiva desencadeada pela tarefa proposta pelo professor, pode mostrar-se mais eficaz no desenvolvimento de processos de raciocínio próximos da demonstração (Galbrait, 1995). Assim, como destaca Bell (2011), o professor deve incentivar os alunos a dar sentido a justificações, solicitar justificações alternativas, enfatizar a explicação do "porquê" e salientar o que valida uma justificação. Esta abordagem oferece aos alunos oportunidades para reexaminarem os seus processos de resolução e apresentarem justificações mais adequadas (Martino & Maher, 1999). Complementarmente, solicitar justificações aos alunos estimula-os a partilhar, considerar e debater argumentos de colega, o que "pode ser uma fonte poderosa de desenvolvimento do raciocínio" (Brodie, 2010, p. 19). Nesta abordagem é ainda importante levar os alunos a justificarem de um modo cada vez mais formal, o que não só lhes permite aprofundar o conhecimento dos conceitos matemáticos, como também os prepara "para uma Matemática de nível superior" (Bell, 2011, p. 690). Deste modo, promover a justificação, particularmente apresentando ou incentivando os alunos a elaborarem justificações de natureza dedutiva (Harel & Rabin, 2010), é um passo fundamental para mais tarde promover a demonstração.

Para promover o raciocínio matemático dos alunos na sala de aula é também necessário explorar situações que conflituem com a visão que os alunos têm de uma determinada ideia, conceito ou propriedade matemática pois pode despoletar contextos ricos para a análise da validade matemática de certas justificações. Assim, sempre que se mostre pertinente, o professor deve destacar as características que tornam uma justificação válida, ou incentivando-os a procurarem eles próprios a validade de uma afirmação ou justificação (Harel & Rabin, 2010). A título de exemplo, em situações em que uma determinada afirmação ou generalização é considerada válida pelos alunos com base num número limitado de casos particulares, cabe ao professor destacar que tal pode não constituir uma justificação válida. Para que surjam situações desta natureza nos momentos de discussão coletiva, é importante que as tarefas propostas incluam questões que levem a justificações com base em inferências indutivas e que podem constituir justificações válidas e inválidas. Coffland (2012) destaca que estas situações podem proporcionar alguma da experiência necessária para desenvolver justificações apropriadas.

Deste modo, promover o raciocínio matemático dos alunos na sala de aula decorre de uma prática profissional do professor em que o seu conhecimento sobre o raciocínio matemático, as tarefas que propõe e as suas ações nos momentos de discussão coletiva são centrais e fundamentais.

3 Considerações metodológicas

Investigação baseada em design

Atendendo a que este estudo tem por objetivo compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994; Erickson, 1986; Janesick, 1994), na modalidade de investigação baseada em design (IBD) (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Shauble, 2003; Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). Nesta abordagem é dada particular importância aos intervenientes, no sentido de compreender os significados dados a situações pelos próprios intervenientes (Erickson, 1986; Janesick, 1994). Neste estudo, em particular, o meu interesse centra-se nos modos de promover o raciocínio matemático dos alunos na sala de aula, com o intuito de melhor compreender, do ponto de vista do professor, como tal pode ser alcançado. Pretendo ainda dar uma maior ênfase ao processo e não aos resultados ou produtos, desenvolvendo uma análise de dados tendencialmente indutiva e de natureza descritiva (Bogdan & Biklen, 1994).

Tratando-se de uma IBD, é desenvolvida na vertente de estudo de sala de aula (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2016). A adequação desta modalidade de investigação tem por base duas razões. Por um lado, este estudo visa compreender os modos como professor pode envolver os alunos em processos de raciocínio, ou seja, os modos como o professor promove uma prática particular em sala de aula (Cobb et al., 2016). Por outro lado, o conhecimento sobre os modos como o professor pode ajudar os alunos a raciocinar matematicamente é ainda incipiente (Boaler, 2010), ou seja, a investigação na área onde este estudo se insere é ainda escassa (Cobb et al., 2016).

A opção por uma IBD permite investigar possibilidades de encontrar novas formas de promover a aprendizagem (Cobb et al., 2003), particularmente de promover o raciocínio matemático dos alunos. Para que seja possível investigar tais possibilidades, a IBD tem necessariamente uma natureza interventiva (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2016). Assim, o desenvolvimento desta IBD baseia-se numa conjetura inicial sobre como pode o professor promover o raciocínio matemático em sala de aula, tendo uma forte orientação teórica, mas também pragmática (Cobb et al., 2016). Esta conjetura estrutura o design inicial e considera as tarefas a propor aos alunos e as ações do professor a promover nos momentos de discussão coletiva. O design inicial inclui ainda os tipos de discurso a promover, as ferramentas e materiais a fornecer aos alunos e os meios práticos a utilizar pelo professor para criar relações entre os vários elementos (Cobb et al., 2003). A IBD tem ainda uma natureza cíclica, com fases de preparação, intervenção e análise retrospetiva (Cobb et al., 2016), constituindo o conjunto destas três fases um ciclo de design. Atendendo a esta natureza cíclica, o design inicial é refinado ao longo dos ciclos de design, permitindo experimentação, revisão e abandono de aspetos do design (Cobb et al., 2016). Estes refinamentos do design inicial consideram pressupostos empíricos e teóricos. Por um lado, optar por um estudo de sala de aula permite introduzir alterações às práticas em sala de aula que advêm de combinar e recombinar elementos da investigação no sentido de promover uma abordagem útil e efetiva no contexto específico em que a investigação se desenvolve (Wood & Berry, 2003). Por outro lado, ainda que a IBD seja de natureza interventiva, não tem por objetivo simplesmente reformular práticas de sala de aula, mas também abordar questões de natureza mais teórica, no sentido de trazer novo conhecimento sobre a aprendizagem (Cobb et al., 2003, Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004).

Ciclos de design, participantes e recolha de dados

Esta IBD constitui-se em três ciclos de design, sendo que cada um destes ciclos integra as fases de preparação, intervenção e análise retrospetiva (Cobb et al., 2016).

No primeiro ciclo de design, a fase de preparação inclui o design detalhado da intervenção. É nesta fase que é estruturada a IBD e que surge a formulação inicial da conjetura de design e dos respetivos princípios de design, decorrentes da articulação entre a teoria e estudos empíricos realizados. A intervenção do primeiro ciclo de design é realizada numa turma de 8.º ano, em três aulas de 90 minutos sobre Sequências. Após a intervenção é feita uma análise retrospetiva da intervenção resultando numa reformulação da conjetura. O segundo ciclo de design, inicia-se igualmente com a fase de preparação e inclui uma nova fase de intervenção, realizada numa turma de 7.º ano, em cinco aulas de 90 minutos e quatro aulas de 45 minutos sobre equações lineares. Tal como no ciclo anterior, as fases de análise retrospetiva e de preparação do terceiro ciclo de design sucedem a fase de intervenção. O terceiro e último ciclo de design é realizado também numa turma de 7.º ano, em sete aulas de 90 minutos e duas aulas de 45 minutos sobre equações lineares. É realizada neste ciclo de design uma análise retrospetiva mais proeminente que decorre não apenas da intervenção deste último ciclo, mas de todas as fases antecedentes dos três ciclos de design. A Figura 3 apresenta esquematicamente estes ciclos de design e as suas fases.

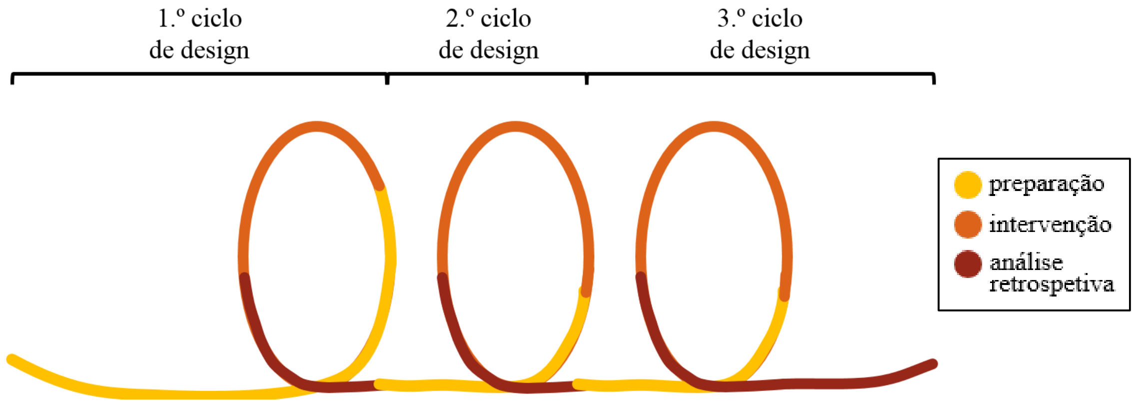


Figura 3. Fases e ciclos de design da IBD deste estudo.

Participantes em cada ciclo. Em cada um dos ciclos de design os participantes centrais na investigação são uma professora e os alunos de uma das turmas dessa professora.

No primeiro ciclo de design, a professora convidada a participar tem mais de 10 anos de serviço e investe constantemente em melhorar a sua prática profissional. De entre as turmas que leciona, é selecionada uma turma de 8.º ano com um ambiente de trabalho muito produtivo, ainda que, de acordo com a informação dada pela professora, exista uma disparidade significativa entre o trabalho desenvolvido pelos bons alunos e pelos alunos com mais dificuldade. Nos segundo e terceiro ciclos de design, a professora participante tem também mais de 10 anos de serviço e investe igualmente em melhorar a sua prática profissional. As intervenções destes ciclos de design são feitas em duas turmas de 7.º ano, em anos letivos consecutivos e em escolas distintas. Estas turmas têm também um ambiente de trabalho produtivo e alunos com diferentes níveis de desempenho, ainda que com ritmos de trabalho próximos. Atendendo aos objetivos do estudo, a seleção das professoras considerou essencialmente dois pressupostos: (1) tratar-se de um professor que apresente disponibilidade para cooperar na investigação com todas as implicações que esta poderá trazer, nomeadamente possíveis alterações nas suas práticas letivas; e (2) ser um professor com alguma experiência, de modo a possuir o conhecimento didático necessário a uma participação confiante na investigação, e para que seja possível um contributo mais sólido para a preparação da intervenção. Quanto à seleção das turmas, de entre as turmas da professora em cada ciclo de design, foi selecionada a turma que, de acordo com a professora, tinha um ambiente de trabalho mais produtivo e alunos com diferentes níveis de desempenho na disciplina de Matemática.

Recolha de dados. Considerando as características qualitativas da investigação, os dados são recolhidos por mim em sala de aula, sendo complementados com informação decorrente de contactos diretos com os participantes do estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, a recolha de dados envolve o que acontece durante cada uma das intervenções e, em parte, de cada uma das fases de preparação. Neste sentido, os dados são recolhidos utilizando vários processos característicos de recolha de dados qualitativa, nomeadamente, a observação direta, a recolha documental, a entrevista e o diário de bordo.

A observação direta decorre nas aulas de cada uma das intervenções e nas reuniões que tive com a professora na preparação e antes e após as aulas da intervenção. Tanto as aulas como as reuniões são gravadas em áudio e em vídeo, para que possam posteriormente ser analisadas em pormenor. A opção pela gravação considera duas possíveis desvantagens que lhe estão associadas. Por um lado, os alunos e a professora podem alterar os seus comportamentos perante a câmara de vídeo. No entanto, a presença da câmara tende a ser desvalorizada ou mesmo esquecida passado pouco tempo (Jorgensen, 1989). Por outro lado, das gravações surge a necessidade de transcrições, sendo necessário despender bastante tempo para as realizar. Contudo, as transcrições permitem uma análise mais detalhada e ainda ilustrar situações de um modo significativamente mais fiável do que com o uso exclusivo de registos escritos durante a observação. O uso do vídeo, além de facilitar o processo de transcrição, permite ainda manter um registo bastante detalhado das situações que pode ser reanalisado sempre que necessário.

No início e no final de cada ciclo de design é ainda realizada uma entrevista à professora participante, também gravada em áudio e vídeo. A entrevista inicial tem por objetivo compreender as perspetivas iniciais da professora quanto ao raciocínio matemático dos alunos no âmbito do tópico da intervenção. A entrevista final pretende documentar a opinião da professora quanto à concretização do design da intervenção e quanto a novas perspetivas sobre o raciocínio matemático dos alunos.

Além da observação direta e das entrevistas, a recolha de dados considera ainda a recolha documental de produções dos alunos em contexto de sala de aula. Esta recolha documental tem por objetivo complementar as gravações tanto para posterior análise como para ilustração de situações na disseminação de resultados. Dada a natureza da IBD, são ainda considerados para esta recolha, os documentos referentes à preparação das intervenções, como planificações e tarefas a propor.

Com o objetivo de facilitar o processo de análise de dados, é ainda mantido um diário de bordo com anotações realizadas durante e após as aulas da intervenção e durante e após as reuniões com a professora. Estas anotações correspondem (1) a apontadores para situações da sala de aula ou da reunião que me parecem particularmente relevantes para a investigação, (2) a referências a situações em que os alunos evidenciam processos de raciocínio e a situações que me parecem de particular interesse nas ações da professora, (3) a ideias para observações e reuniões subsequentes, (4) a alguma análise preliminar dos dados observados e (5) a outras situações que surgem e que parecem pertinentes para a investigação.

Conjetura e princípios de design

Um dos aspetos centrais da IBD é a identificação das capacidades dos alunos, das práticas habituais do professor e de outros recursos úteis para a construção da intervenção (Cobb et al., 2003). Esta identificação é um dos suportes da conjetura inicial, sendo outro suporte a teoria sobre o domínio a investigar. Deste modo, a conjetura inicial que proponho neste estudo considera as interpretações e resultados indicados na literatura existente sobre o tema, e também os resultados da investigação que realizei anteriormente, tanto no mestrado (Mata-Pereira, 2012), como no início do doutoramento (Artigo I; Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013). O refinamento dos princípios de design e, consequentemente, da conjetura, decorrem dos vários momentos de intervenção e de análise retrospetiva desta IBD.

Ponto de partida. Como já referi, é o estudo de mestrado (Mata-Pereira, 2012) que impulsiona este estudo. Contudo, é com o estudo inicial que faço sobre o raciocínio matemático de alunos de 3.º ciclo em conjuntos numéricos (Artigo I) que emergem contributos mais significativos para a intervenção do primeiro ciclo de design. Complementarmente, e com o intuito de documentar as ações do professor, realizo ainda um estudo piloto com a professora participante no primeiro ciclo de design (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013). Estes dois estudos visam principalmente informar o design de um ponto de vista empírico. Assim, do primeiro estudo (Artigo 1) decorrem contributos essencialmente para documentar os processos de raciocínio de alunos do 3.º ciclo do ensino básico e as relações entre esses processos e as tarefas propostas. E do segundo estudo (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013) decorrem contributos referentes às ações do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos. Atendendo ao enquadramento teórico apresentado na secção *Raciocínio matemático* e aos estudos acima referidos, construo um conjunto de princípios de design no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula. Estes princípios subdividem-se em princípios referentes às tarefas a propor e princípios quanto às ações do professor. Quanto aos primeiros princípios de design, visam que o professor proponha tarefas (T1) de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas, (T2) que incluam questões com diferentes graus de desafio, (T3) que incluam questões que incitem a formulação de generalizações, e (T4) que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução. Já os princípios de design referentes às ações do professor que pretendem promover o raciocínio matemático dos alunos são os seguintes: (A1) acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa, (A2) solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva, (A3) destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida, (A4) propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos, (A5) encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva, (A6) aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique, e (A7) desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações. Deste modo, a conjetura inicial esta IBD é que *uma intervenção baseada nestes princípios de design contribui para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula*.

Alterações aos princípios de design. Considerando as fases de análise retrospetiva referentes aos primeiros dois ciclos de design, os princípios de design iniciais foram refinados para as intervenções dos segundo e terceiro ciclos de design. Deste refinamento resultaram as alterações sintetizadas nas Tabelas 1 e 2, onde cada coluna corresponde a um ciclo de design, a união de células na horizontal corresponde a princípios que não foram alterados entre ciclos e a união de células na vertical corresponde à articulação de dois princípios do ciclo anterior. Cada um dos três conjuntos de princípios de design correspondentes a cada um dos três ciclos de design resulta numa conjetura de design distinta, visto que são os princípios de design que estruturam a conjetura formulada.

As alterações aos princípios de design ao longo dos ciclos derivaram de diversas situações e são analisadas na secção *Discussão*. É ainda apresentada uma proposta final para os princípios de design na secção *Conclusão*, decorrente da análise retrospetiva do terceiro ciclo de design e do conjunto dos três ciclos de design, ou seja, de toda a IDB.

Tabela 1

Alterações aos princípios de design para as tarefas ao longo dos ciclos de design.[2]

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Princípios de design</td></tr>
<tr><td></td><td>Primeiro ciclo de design</td><td>Segundo ciclo de design</td><td>Terceiro ciclo de design</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Tarefas</td><td>[T1] Propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas.</td><td colspan="2" rowspan="2">[T5] Propor tarefas que incluam uma diversidade de questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios.</td></tr>
<tr><td>[T2] Propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">[T3] Propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações.</td></tr>
<tr><td colspan="3">[T4] Propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução.</td></tr>
<tr><td>(inexistente)</td><td colspan="2">[T6] Propor tarefas que incluam questões que permitem uma variedade de processos de resolução.</td></tr>
</table>

[2] Os códigos apresentados nesta tabela diferem dos códigos apresentados nos artigos. A equivalência entre os vários códigos pode ser consultada no Anexo 5.

Tabela 2

Alterações aos princípios de design para as ações do professor ao longo dos ciclos de design.[3]

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Princípios de design</td></tr>
<tr><td></td><td>Primeiro ciclo de design</td><td>Segundo ciclo de design</td><td>Terceiro ciclo de design</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Ações do professor</td><td colspan="3">[A1] Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa.</td></tr>
<tr><td>[A2] Solicitar a explicação do “porquê” e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva.</td><td>[A2′] Solicitar a explicação do “porquê” e justificações alternativas.</td><td>[A2″] Propor situações que levem os alunos a justificar e apresentar justificações alternativas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">[A3] Destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.</td><td>[A3′] Propor situações que levem os alunos a identificar justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.</td></tr>
<tr><td>[A4] Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos.</td><td colspan="2">(retirado)</td></tr>
<tr><td colspan="2">[A5] Encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva.</td><td rowspan="2">[A8] Encorajar a partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique.</td></tr>
<tr><td colspan="2">[A6] Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique.</td></tr>
<tr><td>(inexistente)</td><td>[A9] Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio como a generalização e a justificação.</td><td>[A9′] Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização.</td></tr>
<tr><td>[A7] Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações.</td><td>[A7′] Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações ou justificações.</td><td>[A7″] Desafiar os alunos a ir além da tarefa.</td></tr>
</table>

[3] Os códigos apresentados nesta tabela diferem dos códigos apresentados nos artigos. A equivalência entre os vários códigos pode ser consultada no Anexo 5.

Preparação das intervenções

Neste estudo, a sala de aula constitui o meio privilegiado para promover o raciocínio matemático dos alunos. Neste meio, o professor tem um papel fundamental, pelo que são discutidas com a professora participante tanto as tarefas a propor como as ações em sala de aula. Esta discussão com a professora concretiza-se em reuniões de preparação e de reflexão sobre as aulas da intervenção e é fundamentada pela conjetura e respetivos princípios de design.

Ainda que a planificação de cada intervenção seja desenvolvida com a professora da turma, são considerados *a priori* alguns elementos, nomeadamente aspetos curriculares instituídos a nível nacional. Um dos aspetos centrais de cada intervenção é contribuir para o propósito principal de ensino da Álgebra no 3.º ciclo apresentado no programa em vigor durante primeiro ciclo de design (ME, 2007). Nos ciclos seguintes, sendo o programa em vigor omisso quanto a este propósito, opto por considerar para as intervenções o entendimento que é o dado pelo programa anterior. Deste modo, cada uma das intervenções é planeada tendo em vista não apenas o raciocínio matemático, mas também "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (ME, 2007, p. 55). Num mesmo sentido, as intervenções pretendem suscitar aprendizagens que permitam aos alunos (i) "ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos; (ii) compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta e inversa; (iii) ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; e (iv) ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos" (ME, 2007, p. 55). Estes objetivos gerais de aprendizagem são naturalmente adaptados aos tópicos das intervenções, considerando os objetivos específicos desses tópicos. Além destes aspetos, são ainda considerados para a planificação das intervenções os conteúdos matemáticos presentes nas metas curriculares (MEC, 2012) e programa posterior (MEC, 2013). Estes últimos documentos são encarados na planificação como metas a atingir no final da intervenção e não como um meio que estrutura a intervenção.

No primeiro ciclo de design, o estudo é realizado com a professora da turma que é também a professora participante no estudo piloto (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013). Assim, a discussão e a própria construção dos princípios de design têm também em consideração as ações habituais da professora em sala de aula. Deste modo, longe de pretender impor determinadas tarefas ou ações do professor para a fase de intervenção, estes elementos são discutidos com a professora no sentido de promover uma prática de sala de aula com que a professora se identifique. Esta abordagem mantém-se nos ciclos de design seguintes, ainda que, no caso do segundo ciclo de design e num primeiro momento, o conhecimento sobre as ações habituais da professora em sala de aula não resulte da observação participante da minha parte, mas sim de informação apresentada pela própria professora. Decorrente desta abordagem, num primeiro momento de planificação, são definidos objetivos para as várias aulas da intervenção. Face a esses objetivos, proponho uma tarefa ou ideia de tarefa, ainda que em algumas situações esta proposta seja feita pela professora participante. Tendo por base os objetivos e a tarefa, defino um plano de aula que considera as tarefas a propor e atividades de aprendizagem esperadas, a duração prevista, a possível atividade dos alunos e possíveis dificuldades, a resposta esperada pelo professor e outros aspetos a considerar e ainda os objetivos e avaliação a fazer. Este plano de aula tem naturalmente em consideração os princípios de design e respetiva conjetura. Este plano de aula é discutido, alterado e/ou adaptado pela professora participante de acordo com a sua perceção, suportada na sua experiência e no seu conhecimento sobre os alunos da turma. Esta abordagem permite, além de informar a intervenção, relacionar pressupostos presentes na literatura sobre como promover o raciocínio matemático dos alunos com ideias de propostas de tarefas e ações do professor. Como indica Boaler (2010), estas conexões entre a literatura e a experiência do professor podem trazer resultados muito poderosos.

Assim, cada intervenção é estruturada por orientações gerais que dizem respeito às tarefas a propor e às ações do professor que são esperadas em sala de aula e por orientações específicas concretizadas em planos de aula. Estas orientações baseiam-se nos pressupostos orientadores da literatura, mas também em discussões com a professora que, pela sua experiência e conhecimento dos alunos, contribui de forma fundamental para aperfeiçoar a intervenção.

Processo de análise de dados

Considerando as características da IBD, a análise de dados é realizada em vários momentos: no estudo inicial, durante as fases de intervenção de cada ciclo de design e nas fases de análise retrospetiva de cada ciclo de design, sendo que nesta fase do terceiro ciclo é também realizada uma análise dos três ciclos de design como um todo. Todo o processo de análise de dados é apoiado pelo software NVivo, particularmente, na organização e categorização sistemática de dados.

No estudo inicial, a análise dos dados centra-se nas generalizações e justificações dos alunos, processos de raciocínio matemático considerados centrais neste estudo. Esta análise é realizada partindo das transcrições de momentos de discussão entre mim (enquanto investigadora) e um pequeno conjunto de alunos (um a três alunos). Estes momentos de discussão decorrem da resolução desses alunos de uma tarefa de natureza exploratória.

A análise de dados da intervenção de cada ciclo de design ocorre essencialmente em três níveis. Num primeiro nível, a análise decorre em simultâneo com a recolha de dados de cada intervenção, tratando-se de uma análise preliminar. A este nível, o principal objetivo é destacar do grande volume dos dados aqueles que se adequam ao objetivo do estudo, ainda que sem perder a sua contextualização, identificando momentos-chave em cada uma das aulas e reuniões com a professora. A reflexão tem neste nível um papel de destaque pois permite que, entre as aulas de uma mesma intervenção, sejam prospetados eventos futuros, tanto no sentido de aprimorar a recolha de dados como de melhorar pontualmente aspetos da intervenção. Nesta fase é ainda realizada uma organização sistemática dos dados que tem por intenção identificar os componentes básicos dos dados (Jorgensen, 1989), nomeadamente, organizando-os por intervenção, por aula, por momento da aula e por momentos-chave.

O segundo nível de análise é realizado na fase de análise retrospetiva de cada um dos ciclos de design. A este nível a análise é mais estruturada e aprofundada. Partindo da transcrição das gravações de sala de aula referentes aos momentos-chave identificados na análise preliminar, são identificados e analisados os processos de raciocínio dos alunos, as ações do professor e os princípios de design referentes às ações do professor. Particularmente no terceiro ciclo de design, quanto aos processos de raciocínio dos alunos, foco-me na justificação, optando por aprofundar a análise deste processo de raciocínio.

Depois de finalizada a análise do terceiro ciclo de design, é necessário um último nível de análise que tem por objetivo relacionar e interpretar os vários ciclos de design, tendo em vista dar resposta às questões de investigação e ao objetivo que proponho para este estudo. A este nível, procedo à análise crítica do trabalho desenvolvido e da própria IBD deste estudo. Assim, procuro neste nível de análise encontrar evidências que sustentem a gramática argumentativa desta IBD (Cobb et al., 2016), ou seja, compreender as relações entre os princípios de design e os processos de raciocínio matemático dos alunos ao longo dos três ciclos, documentar as sequências de ações do professor que promovem esses processos e identificar os princípios de design que são efetivamente necessários e não apenas potenciais para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

A ética nesta investigação

Nesta investigação considero vários aspetos de natureza ética e, em particular, o procedimento de autorização para a realização da investigação. São efetuados pedidos de autorização a todos os participantes ou respetivos encarregados de educação, que incluem dar conhecimento do objetivo do estudo e das suas implicações, tanto a nível pessoal, como a nível educacional. Particularmente a nível educacional, é garantido que da participação no estudo não decorrerá qualquer prejuízo para as aprendizagens dos alunos na medida em que as intervenções decorrem ao longo de unidades de ensino cujos conteúdos são os estipulados pelo currículo. Neste sentido, enquanto investigadora, faço o que está ao meu alcance para que a investigação contribua positivamente para a aprendizagem dos alunos (AERA, 2011). Quanto ao pedido de autorização para a participação do professor, é feito verbalmente, ficando registado o seu interesse em participar na vídeo gravação da primeira reunião. Nesta investigação, os participantes são tratados com o máximo respeito e as suas identidades são protegidas, sendo assim respeitados os direitos e a dignidade de todos os envolvidos (AERA, 2011). Com o intuito de obter cooperação dos participantes, a sua participação é voluntária e o objetivo do estudo e a definição das condições de participação são definidas no início da intervenção e mantidas até ao seu final (Bogdan & Biklen, 1994).

Além dos aspetos diretamente relacionados com os participantes, considero também outros aspetos relacionados com a minha conduta enquanto investigadora, orientados pelo código de ética da AERA (2011) e pela Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (2016). Particularmente, destaco, por um lado, a honestidade e integridade com que conduzo todo o processo de investigação, nomeadamente análise e apresentação de resultados, comprometendo-me a ser responsabilizada pela minha investigação. E, por outro lado, comprometo-me a tornar público, através da disseminação de resultados, o conhecimento que advir desta investigação e que possa contribuir para o conhecimento da comunidade científica e da comunidade escolar. Deste último compromisso destaco a disseminação realizada através dos artigos que estruturam este trabalho, bem como o próprio *kappa*.

4 Artigos

Os artigos nesta IBD

Os artigos que suportam este estudo relacionam-se com vários momentos dos ciclos de design desta IBD (Figura 4). O Artigo I refere-se ao estudo inicial que ocorre no início da fase de preparação do primeiro ciclo de design. Os Artigos II, III e IV, decorrem, respetivamente, da fase de análise retrospetiva de cada um dos ciclos de design e reportam aspetos da intervenção desse ciclo.

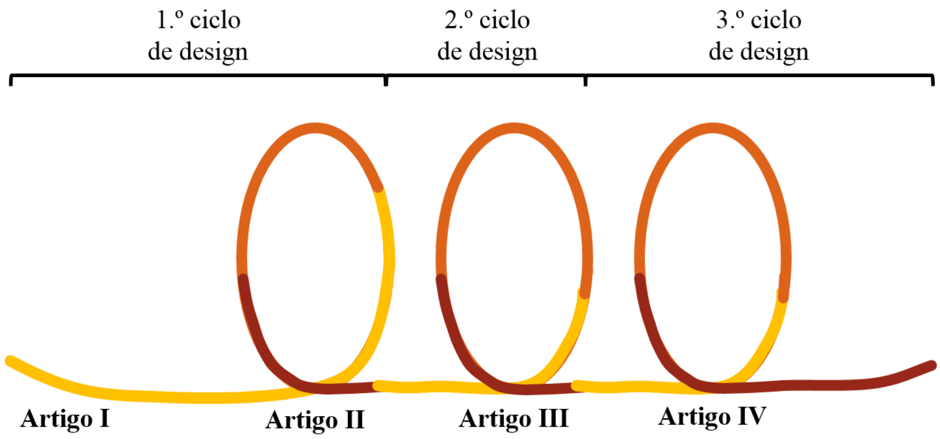


Figura 4. Os artigos na sua relação com os ciclos de design da IBD.

Artigo I. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo.

Autores: *Joana Mata-Pereira e João Pedro da Ponte*

Publicado em: *Quadrante, vol. XXI, n.º 2, 2012*

O primeiro artigo (Anexo 1) centra-se no estudo de processos de raciocínio matemático de alunos de 3.º ciclo. São destacadas a generalização e a justificação enquanto processos-chave do raciocínio matemático e é também dada atenção às representações e à significação na sua relação com o raciocínio matemático. A fundamentação teórica começa por discutir o conceito de raciocínio matemático, destaca de seguida abordagens dos alunos nos processos de generalização e discute aspetos referentes aos processos de justificação. São posteriormente referidas as representações e detalhadas as transformações entre representações, nomeadamente tratamentos e conversões. Por fim, é definido o que se entende por significação e é discutida a sua relação com o raciocínio matemático. Em termos de resultados, são analisadas resoluções de tarefas envolvendo propriedades dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, respetivamente de alunos de 7.º e de 9.º ano. Em ambas as situações os alunos selecionados são dos que apresentam melhor desempenho nas respetivas turmas, com a expectativa de que apresentem raciocínios mais elaborados. As conclusões remetem para generalizações com abordagens essencialmente indutivas e abdutivas, ainda que algumas tenham uma natureza dedutiva. Quanto às justificações, os alunos nem sempre o fazem espontaneamente, ainda que justifiquem quando questionados para o fazerem. As justificações que apresentam são essencialmente baseadas em conhecimentos anteriores, propriedades ou conceitos matemáticos e contraexemplos que refutam uma afirmação. No que respeita às representações, são utilizadas pelos alunos sem dificuldades e não parecem limitar os seus processos de raciocínio. Por fim, quanto à significação, é referida a sua estreita relação com o raciocínio matemático, atendendo a que dificuldades nos processos de raciocínio surgem associadas a dificuldades nos processos de significação.

Artigo II. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: Uma Investigação Baseada em Design.

Autores: *Joana Mata-Pereira e João Pedro da Ponte*

Aceite para publicação em: *Bolema, vol. 32, n.º 62, 2018*

O segundo artigo (Anexo 2) foca-se nos princípios de design referentes às tarefas a propor e às ações do professor na sala de aula, assim como no contributo desses princípios para promover o raciocínio matemático dos alunos. À semelhança do artigo I, o quadro teórico começa por discutir o conceito de raciocínio matemático após o que apresenta uma discussão sobre características das tarefas a propor aos alunos em sala de aula com o intuito de promover o raciocínio matemático. De seguida, a discussão centra-se nas ações do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos. Neste artigo são apresentados os princípios de design e a conjetura inicial da IBD e a análise de dados é representativa do primeiro ciclo de intervenção. Esta análise considera os princípios de design, os processos de raciocínio dos alunos de generalizar e justificar, e ainda as ações do professor de convidar, guiar, sugerir e desafiar. São analisados momentos de discussão coletiva originados por duas tarefas sobre sequências. As conclusões começam por destacar a importância das ações do professor nos momentos de discussão coletiva para que processos de raciocínio possam emergir em sala de aula. Destacam ainda que os princípios de design contribuem para que os processos de raciocínio dos alunos se evidenciem nos momentos de discussão coletiva de tarefas de natureza exploratória. O artigo termina apontando possíveis refinamentos nos princípios de design, tanto ao nível das ações do professor como das tarefas. Quanto às tarefas destaca-se a importância de questões que permitam uma variedade de processos de resolução. Quanto às ações do professor, refere-se que, no sentido de ir além da tarefa, devem ser propostas novas questões e generalizações, mas também novas justificações.

Artigo III. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification.

Autores: *Joana Mata-Pereira e João Pedro da Ponte*

Publicado em: *Educational Studies in Mathematics, n.º 96, 2017*

O terceiro artigo (Anexo 3) foca-se na relação entre as ações do professor e as generalizações e justificações dos alunos e diz respeito ao segundo ciclo da IBD. Assim, o seu objetivo é contribuir com um conjunto de princípios de design sobre tarefas e ações do professor que visam promover o raciocínio matemático dos alunos e também ilustrar os modos como esses princípios podem ser mobilizados em sala de aula por forma a promover generalizações e justificações dos alunos. Tal como os artigos anteriores, a fundamentação teórica deste artigo começa por discutir o que é entendido por raciocínio matemático e por processos de raciocínio, nomeadamente generalização e justificação. Tal como o artigo II, prossegue com uma discussão sobre as características das tarefas e das ações do professor que visam promover o raciocínio matemático dos alunos, ainda que neste artigo a discussão principal seja em torno das ações do professor. São posteriormente apresentados os princípios de design do segundo ciclo de intervenção. A análise de dados centra-se nas ações do professor durante discussões coletivas e nas suas relações com os princípios de design para as tarefas e para as ações do professor. A discussão começa por destacar a existência de sequências de ações do professor que incitam generalizações e justificações em situações de natureza diversa, remetendo para os episódios analisados. A discussão segue com a apresentação da relação entre os princípios de design e os processos de raciocínio dos alunos, tanto para os princípios relacionados com as tarefas, como para os princípios relacionados com as ações do professor. Nesta última parte da discussão, os princípios são ainda articulados com as ações do professor de convidar, informar, guiar e desafiar. Esta parte da discussão destaca a necessidade de olhar para as ações do professor de um modo sequencial e não para as ações de modo isolado. A conclusão começa por apontar a importância da estrutura da intervenção, refere depois a discussão coletiva como um aspeto central para gerar oportunidades para raciocinar matematicamente e, por fim, destaca que uma sequência de ações que se desenvolva em torno de uma ação de desafiar pode desencadear uma generalização ou uma justificação. O artigo aponta ainda algumas questões para investigação futura, onde se destaca a relação entre os processos de raciocínio estudados e a demonstração, e salienta a importância de partilhar intervenções sobre o raciocínio matemático.

Artigo IV. Teacher's actions to promote students' justification.

Autores: *Joana Mata-Pereira e João Pedro da Ponte*

Publicado em: *Acta Scientiae, vol. 20, n.º 3, 2018*

O artigo final (Anexo 4) centra-se na justificação enquanto processo de raciocínio e tem por objetivo compreender de que modo um conjunto de princípios de design referentes a tarefas e ações do professor contribui para promover justificações de alunos em momentos de discussão coletiva e compreender que tipos de justificação surgem dessas discussões. Este artigo resulta do terceiro ciclo da IBD. A fundamentação teórica foca-se essencialmente nas justificações dos alunos e aborda também as tarefas e ações do professor que promovem a justificação. A secção sobre as justificações dos alunos começa por discutir o que se entende por justificação no contexto de sala de aula. Esta secção continua com a articulação de classificações de justificações propostas por diversos autores. Esta articulação constitui-se num quadro conceptual que visa uma compreensão das justificações dos alunos ao nível da sua complexidade e formalidade. Neste artigo os princípios de design apresentados dizem apenas respeito aos que se relacionam diretamente com a justificação, tanto quanto às tarefas como às ações do professor. Estes princípios, assim como os dados apresentados, são relativos ao terceiro e último ciclo de intervenção. A análise de dados centra-se nos princípios de design relacionados com a justificação, nas ações do professor de convidar, guiar, informar e desafiar e no quadro conceptual apresentado na fundamentação teórica do artigo referente às justificações dos alunos. A discussão começa por apontar o papel das discussões coletivas para que surjam momentos propensos à justificação, mesmo que se tratem de justificações imprevistas. De seguida, a discussão refere que determinadas sequências de ações do professor que se baseiam nos princípios de design permitem aos alunos apresentar justificações. Estas justificações são caracterizadas quanto à sua completude e validade e, posteriormente, quanto à sua formalidade e complexidade. Assim, o artigo conclui que, articulando as sequências de ações do professor com os princípios de design, resultam oportunidades para os alunos justificarem em diferentes níveis com formalidade e complexidade crescentes.

Relação entre os artigos

Os quatro artigos sobre o estudo de doutoramento que estruturam o presente *kappa* têm propósitos distintos, ainda estreitamente interligados. Estes artigos relacionam-se de formas diversas, quer entre si, quer com a IBD.

O artigo I contribui para o conhecimento sobre como promover o raciocínio matemático dos alunos pois, como referido na sua introdução, “para progredirmos na compreensão desta questão [de como promover o raciocínio matemático dos alunos], um passo fundamental é conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos” (Artigo I, p. 71). Este artigo, centrado no aluno e nos seus processos de raciocínio, contribui para identificar os processos de raciocínio que podem emergir no 3.º ciclo do ensino básico. Ainda que o artigo foque também as representações e os processos de significação, estas temáticas acabaram por ser pouco aprofundadas na IBD, ainda que não estejam ausentes. Por um lado, nem as representações nem os processos de significação são alvo de foco ou de análise, pois optei por me centrar no raciocínio matemático. Por outro lado, as representações e os processos de significação são inerentes aos processos de raciocínio, assumindo-se que os alunos, ao raciocinar, usam representações e desencadeiam processos de significação. Assim, ao focar o raciocínio nas intervenções, tanto as representações como os processos de significação estão inevitavelmente presentes. Pelos seus contributos, este artigo contribui principalmente para dar resposta à primeira questão de investigação, que pretende caracterizar as generalizações e justificações de alunos do 3.º ciclo do ensino básico. Este artigo constitui ainda um ponto de partida para a estruturação das intervenções da IBD.

Os artigos II e III são os que, pelo seu objetivo, mais se aproximam entre si. Ainda que no artigo II os dados apresentados sejam referentes à primeira intervenção da IBD e no artigo III à segunda intervenção da IBD, ambos os artigos centram a análise nos princípios de design, ações do professor e processos de raciocínio. Sendo estes artigos próximos, importa destacar o que os distingue. Primeiramente, no artigo II as tarefas e as ações do professor são abordadas de um modo relativamente equilibrado, enquanto o artigo III opta por uma abordagem mais aprofundada das ações do professor. Este aprofundamento feito no artigo III decorre do contributo do estudo abordado no artigo II para a segunda intervenção da IBD, tanto quanto ao refinamento dos princípios de design, como quanto à importância que é necessário dar às ações do professor nos momentos de discussão coletiva. Outro aspeto distintivo respeita às generalizações e justificações dos alunos que emergem nos momentos de discussão coletiva decorrentes dos princípios de design, sendo os artigos complementares no contributo para o conhecimento sobre a relação entre os princípios e os processos de raciocínio dos alunos. Por um lado, há generalizações e justificações distintas decorrentes de as intervenções serem em unidades temáticas diferentes (sequências e equações, respetivamente, no primeiro e no segundo ciclos de design). Por outro lado, pelas características das tarefas e das ações do professor é possível destacar, em unidades temáticas diversas, características comuns nos processos de raciocínio dos alunos. Ainda quanto aos aspetos distintivos, o artigo II pretende ser representativo dos processos de raciocínio que emergem em todo o primeiro ciclo de intervenção, enquanto o artigo III tem em vista ilustrar a variedade de processos de raciocínio que pode emergir de uma só tarefa e numa só aula. Assim, o artigo II pretende dar resposta principalmente às questões de investigação 3 e 4 que visam estabelecer relações entre as tarefas propostas e ações do professor e, respetivamente, as generalizações e as justificações dos alunos que emergem nos momentos de discussão coletiva. Já o artigo III contribui de um modo mais significativo para responder à questão de investigação 2, que pretende caracterizar as ações do professor nos momentos de discussão coletiva.

Finalmente, o artigo IV, cujos dados respeitam ao terceiro e último ciclo de intervenção da IBD, ainda que analise também os princípios de design, ações do professor e processos de raciocínio, tem um foco particular nas justificações dos alunos decorrentes da intervenção. Este artigo pretende complementar os dois artigos anteriores quanto ao conhecimento sobre as relações entre os princípios de design e os processos de raciocínio dos alunos, e essencialmente aprofundar o estudo sobre justificações dos alunos no contexto da IBD. Este artigo, pelo seu foco específico na justificação, apresenta contributos fundamentais para a questão de investigação 4, mas também para a questão de investigação 1.

Cada artigo do estudo, individualmente, além de contribuir significativamente para dar resposta às questões de investigação identificadas, contribui ainda de um modo ou de outro para a resposta às restantes questões. Assim, na sua articulação, os quatro artigos permitem sustentar a resposta ao objetivo do estudo desta investigação que visa compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

5 Discussão

Ações do professor

Para compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, é essencial conhecer as ações do professor que, nos momentos de discussão coletiva, podem desencadear o raciocínio matemático dos alunos. Estas ações do professor variam em consonância com a tarefa proposta e com o decorrer da discussão coletiva. Assim, ainda que estas ações não sigam uma ordem ou sequência pré-estabelecida, não são aleatórias e podem ser associadas tanto a características das tarefas como a situações particulares dos momentos de discussão coletiva.

Na sua generalidade, em cada uma das três intervenções desta IBD, as questões propostas nas tarefas propiciam um momento de discussão coletiva que emerge na sequência de uma ação de convidar. Esta ação do professor, além de desencadear a discussão coletiva, permite a participação dos alunos e valoriza o seu envolvimento (Selling, 2016), pelo que constitui um primeiro contributo para promover o raciocínio matemático dos alunos (Stylianou & Blanton, 2011).

As ações do professor que sucedem as ações de convidar relacionam-se essencialmente com as intervenções dos alunos. Estas ações têm por base os princípios de design e consideram as oportunidades que as intervenções dos alunos criam para o prosseguimento dos objetivos definidos para a aula. No entanto, as intervenções dos alunos conferem um caracter de imprevisibilidade às discussões coletivas. Assim, além da discussão das questões das tarefas, surgem nos momentos de discussão coletiva oportunidades para promover o raciocínio matemático dos alunos não previstas no planeamento da aula (e.g., Artigos II e IV). Ao emergirem de ideias, conceitos e propriedades matemáticas decorrentes da tarefa proposta, mas não diretamente relacionadas com a tarefa, estes momentos inesperados da discussão matemática permitem aos alunos partilhar, discutir e clarificar o seu raciocínio e conhecimento matemático, tal como de resto assinala Galbrait (1995).

Alguns dos princípios de design contribuem diretamente para que estas situações sejam possíveis. Em particular, os princípios *Encorajar a partilha de ideias nos* *momentos de discussão coletiva* [A5] e *Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique* [A6] têm um papel central. Estes princípios surgem na literatura com objetivos distintos (e.g., Stein et al., 2008) e ao longo das duas primeiras intervenções surgem tanto separadamente como em conjunto. No entanto, quando a ação do professor considera ambos os princípios, os contributos para promover o raciocínio matemático dos alunos são mais evidentes (e.g., Artigo II, p. 120, p. 126, Artigo III, p. 140, p. 145). Adicionalmente, as contribuições incorretas ou parciais podem fazer parte de um esforço por parte dos alunos para darem sentido a ideias matemáticas importantes (Brodie, 2010). Assim, é pertinente encorajar a partilha de ideias para que haja uma discussão que permita desconstruir, completar ou clarificar essas contribuições. É pelas potencialidades desta articulação que surge o princípio *Encorajar a partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique* [A8]. Assim, no terceiro ciclo de design, este princípio evidencia-se como promissor para promover o raciocínio matemático dos alunos (e.g., Artigo IV, p. 172). Estes princípios (A5, A6 e A8) contribuem ainda para estruturar a participação dos alunos em momentos da discussão coletiva diretamente relacionados com questões da tarefa.

Quando estes princípios são mobilizados pelo professor, as suas ações são essencialmente de sugerir e de guiar, ainda que por vezes também surjam associados a ações de convidar (e.g., Artigo II) ou de desafiar (e.g., Artigo III).

Complementarmente aos princípios acima referidos (A5, A6 e A8), para que as ações do professor suscitem um ambiente desafiador para promover o raciocínio matemático dos alunos, é igualmente fundamental o princípio de design que visa *Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações* [A7] *ou justificações* [A7′]. Este princípio traduz-se num momento de discussão coletiva desencadeado por uma ação do professor de desafiar (e.g., Artigo II, p. 120, p. 124; Artigo III, p. 143). A alteração ao princípio do primeiro para o segundo ciclo de design (princípio A7 para princípio A7′), deve-se a situações decorrentes da aplicação deste princípio em sala de aula (e.g., Artigo II, p. 122), onde o desafio não se limita a novas questões ou generalizações. Complementarmente, em situações decorrentes da segunda intervenção, também o complemento referente às justificações é insuficiente (e.g., Artigo III, p. 145, p. 148). Assim, considerando as várias situações onde o desafio colocado aos alunos para ir além do proposto pelas tarefas, dada a diferente natureza das propostas feitas aos alunos, opto por não especificar neste princípio de design o que pode incluir o *ir além da tarefa*, simplificando o princípio e alargando o seu possível âmbito ao propor simplesmente *Desafiar os alunos a ir além da tarefa* [A7″]. As ações de desafiar decorrentes destes princípios de design (A7, A7′, A7″) são fundamentais para desencadear momentos onde surgem processos de raciocínio matemático por parte dos alunos (Artigo II; Artigo III; Artigo IV). Estas ações vão além de ações apresentadas na literatura por alguns autores (e.g., Selling, 2016) onde as ações do professor identificadas nos momentos de discussão coletiva são limitadas a ações de convidar, apoiar e guiar (*initiating*, *reprising* e *sustaining*, respetivamente). Estas ações de desafiar constituem ainda oportunidades para aprofundar ideias ou conceitos matemáticos, pois, como refere Brodie (2010), não se pretende que o objetivo último da tarefa seja simplesmente obter respostas corretas.

Tal como referido no Artigo II, é a diversidade de ações do professor que permite que processos de raciocínio matemático dos alunos surjam nos momentos de discussão coletiva. Uma só ação, ainda que possa desencadear um momento de discussão onde surgem processos de raciocínio, tende a não ser suficiente para desencadear o raciocínio matemático (e.g., Artigo III; Kosko et al., 2014). Assim, processos de raciocínio matemático tendem a emergir quando determinadas sequências de ações do professor acontecem nos momentos de discussão coletiva (Artigo III; Artigo IV). Particularmente, uma ação central de desafiar, habitualmente seguida por várias outras ações do professor, pode originar uma generalização ou uma justificação. As ações subsequentes a estas ações centrais de desafiar incluem ações de guiar, de informar ou novas ações de desafiar. Estas ações dependem, por um lado, da perceção do professor sobre o apoio que os alunos necessitam para mobilizar o seu conhecimento (Artigo IV). Por outro lado, as ações do professor dependem da própria natureza das tarefas, sendo que questões mais complexas levam a ações mais desafiantes por parte do professor (Artigo II). Outra situação que tende a promover os processos de raciocínio dos alunos são ações do professor que visam interpretar o que é dito pelos alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio e que consistem em sequências de ações de apoiar ou informar. Estas ações, emergindo no primeiro ciclo de design e complementadas com indicações da literatura (e.g., Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014), deram origem ao princípio de design *Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio como a generalização e a justificação* [A9]. Este princípio, nos ciclos de design seguintes, contribui também para clarificar os processos de raciocínio matemático que surgem na discussão (e.g., Artigo III, pp. 141-142, pp. 145-146).

Ainda que alguns princípios de design referentes às ações do professor tenham uma relação mais direta com os processos de raciocínio matemático dos alunos que emergem nos momentos de discussão coletiva, os princípios de design de modo isolado podem ser insuficientes para que esses processos de raciocínio surjam (e.g., Artigo III, Artigo IV). Cada um dos ciclos de design ilustra modos como estes princípios, na sua relação com as ações do professor, podem desencadear ambientes desafiadores que promovem o raciocínio matemático dos alunos (Artigo II; Artigo III; Artigo IV). Além das relações já apresentadas, um outro exemplo desta articulação entre princípios para as ações do professor é a relação entre os princípios *Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas* [A2'] e *Destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida* [A3]. Estes princípios surgem ainda relacionados a uma sequência de ações de desafiar e guiar e, posteriormente, de informar, e permitem promover o raciocínio matemático dos alunos (Artigo III).

Na literatura, os momentos de discussão coletiva em que existem evidências de processos de raciocínio matemático dos alunos, são identificados como sendo raros (Brodie, 2010). Contudo, nas discussões coletivas das três intervenções desta IBD, os processos de raciocínio matemático que emergem representam uma parte significativa dessas discussões (e.g., Artigo II), sendo maioritariamente desencadeados por ações do professor.

Processos de raciocínio matemático

As ações do professor mais gerais para promover o raciocínio matemático dos alunos, apresentadas acima, têm um papel fundamental. No entanto, para que o raciocínio matemático dos alunos possa emergir em sala de aula, é igualmente central o conhecimento sobre aspetos diretamente relacionados com processos específicos de raciocínio matemático, como a generalização e a justificação. Neste sentido, é particularmente importante o conhecimento sobre estes processos de raciocínio dos alunos, bem como sobre o modo como as tarefas e as ações do professor os podem promover.

Generalizações. No estudo inicial, realizado no início da fase de preparação do primeiro ciclo de design (Artigo I), as generalizações apresentadas pelos alunos têm uma natureza essencialmente indutiva, ainda que, por vezes e particularmente no 9.º ano, as generalizações possam apresentar também características dedutivas. Estas generalizações de alunos de 3.º ciclo assemelham-se assim às abordagens empíricas e dedutivas referidas por Galbrait (1995). Contudo, parte das generalizações tem um caracter abdutivo, como por exemplo generalizações apresentadas por alunos de 7.º ano que não se cingem a uma relação direta entre casos particulares e um caso geral, indiciando conexões com propriedades ou conceitos (Artigo I). Estas últimas generalizações, ao apresentarem características abdutivas que complementam características indutivas, reforçam as potencialidades para a apresentação de generalizações que advêm de combinar processos indutivos e abdutivos (Warren, Trigueros, & Ursini, 2016).

Em alunos do final do 3.º ciclo do ensino básico, onde a linguagem simbólica com variáveis faz já parte do seu conhecimento, as generalizações tornam-se mais imediatas. Apresentar generalizações utilizando a linguagem simbólica pode, contudo, tornar as conexões com propriedades e conceitos matemáticos menos visíveis (Artigo I). No entanto, é também com estes alunos que surgem generalizações de cunho mais dedutivo, que se baseiam mais em propriedades do que em casos particulares, estabelecendo conexões mais complexas. Assim, promover as generalizações em salas de aula de 3.º ciclo inclui promover generalizações de cunho indutivo e abdutivo, mas também generalizações de natureza dedutiva.

Além de apresentar generalizações dos alunos de diferente natureza, nesta investigação são ilustradas generalizações no âmbito do tópico das sequências (Artigo II), mas também no tópico das equações (Artigo III, Artigo IV) e ainda sobre propriedades dos números racionais e dos números reais (Artigo I). Assim, as generalizações analisadas ao longo da IBD evidenciam potencialidades deste processo de raciocínio em vários tópicos, o que vai além de grande parte da investigação respeitante a este processo de raciocínio que se cinge ao tópico das sequências (Warren et al., 2016).

Como emergem as generalizações. As generalizações dos alunos acima apresentadas decorrem das tarefas propostas no estudo apresentado no Artigo I. Assim, para promover o raciocínio matemático do aluno em sala de aula, e particularmente para promover a generalização, os princípios de design para as tarefas propostos nesta IBD são em parte suportados pela teoria e em parte decorrentes deste estudo inicial. As generalizações deste estudo inicial, ao decorrerem das tarefas propostas, vêm reforçar a ideia de que a natureza exploratória das tarefas proporciona aos alunos oportunidades para generalizar (Francisco & Maher, 2011; James, Casas, & Grant, 2016; Lannin, Ellis,

& Elliot, 2011; Ponte, 2007). Assim, torna-se pertinente para o design a estruturação do princípio *Propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratória e/ou problemas* [T1], assim como do princípio *Propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio* [T2]. Atendendo a que tarefas de natureza diversa têm associados graus de desafio distintos (Ponte, 2005), estes princípios são posteriormente associados no princípio *Propor tarefas que incluam uma diversidade de questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios* [T5]. Adicionalmente, decorre também do estudo apresentado no Artigo I, a importância de *Propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações* [T3], pois parte das questões propostas nas tarefas de 7.º e de 9.º ano têm explicitamente por objetivo levar os alunos a generalizar e é destas questões que decorrem generalizações.

Ao longo do estudo, as generalizações dos alunos, surgem tanto durante a resolução da tarefa (Artigo I, Artigo II) como em momentos de discussão coletiva (Artigo III). Quando as generalizações surgem durante a resolução da tarefa, são posteriormente apresentadas e discutidas num momento de discussão coletiva (Artigo II). Já nas situações em que as generalizações surgem no próprio momento de discussão coletiva, decorrem geralmente de situações promovidas pela tarefa (Artigo III). As características das tarefas propostas têm, assim, um papel central para que as generalizações se tornem explícitas nos momentos de discussão coletiva.

Nas situações em que o conhecimento dos alunos é suficiente para generalizar, as generalizações pretendidas emergem na própria resolução da tarefa. Associadas a ações de convidar e de guiar do professor, estas generalizações são apresentadas em momentos de discussão coletiva, onde o desafio se centra em justificar as generalizações (Artigo II). Já em situações em que as generalizações emergem apenas nos momentos de discussão coletiva, as ações do professor passam também por convidar os alunos a participar, mas estas ações são seguidas de ações de desafiar ou guiar. Noutras situações, uma ação central de desafiar seguida de ações de guiar e informar, promove também a generalização. Assim, tal como em estudos anteriores (e.g. Ellis, 2011), as ações que promovem a generalização não ocorrem apenas como ações isoladas, mas sobretudo com sequências de ações que têm lugar nos momentos de discussão coletiva. Nestes casos em que as generalizações surgem nos momentos de discussão coletiva, o foco do professor é, respetivamente, encorajar a partilha de ideias (A5) e desafiar os alunos a ir além do indicado na tarefa (A7, A7′, A7″). As sequências de ações mobilizadas, além de permitirem a discussão das generalizações pretendidas com a tarefa, podem também desencadear generalizações inesperadas ou munir os alunos de exemplos que mais tarde podem ser generalizados (Artigo III).

Justificações. No estudo inicial, as justificações são apresentadas pelos alunos a diferentes níveis e, ainda que no final do 3.º ciclo os alunos tenham alguns cuidados quanto às características das suas justificações, na sua globalidade não dão importância aos requisitos necessários para que uma justificação seja válida (Artigo I). Contudo, verifica-se que, mesmo no início do 3.º ciclo, é possível aos alunos elaborar eficazmente justificações com algum grau de complexidade (Artigo I). Assim, os alunos apresentam justificações que se baseiam: na autoridade, perceção ou casos particulares; em conhecimentos anteriores; em propriedades ou conceitos matemáticos; e em contraexemplos que refutam uma afirmação.

Em intervenções estruturadas pelos princípios de design, e em situações com um foco específico nos princípios diretamente relacionados com a justificação (T4, A2, A2', A2'', A3, A3') articulados com princípios mais gerais (A6, A8) as justificações dos alunos tendem a ser formais, ainda que por vezes incompletas ou inválidas. Contudo, nestas intervenções parte das justificações apresentadas ou não são justificações de todo ou são baseadas na autoridade. Estas justificações (ou não justificações) surgem em situações muito específicas, nas quais os alunos não têm as ferramentas necessárias para justificar (Artigo IV). No entanto, com a introdução da informação necessária, emergem justificações formais apropriadas (Artigo IV). Estas justificações reforçam a ideia de que a formalidade deste processo de raciocínio não é exclusivamente dependente da linguagem simbólica (Warren et al., 2016), visto que, por vezes, a formalidade decorre de enunciar de modo apropriado propriedades e ideias matemáticas (e.g., Artigo IV, p. 166).

Nas intervenções desta investigação, emergem ainda justificações a diferentes níveis de complexidade: não apresentar justificação, apresentar justificações baseadas numa autoridade externa, apresentar justificações baseadas em evidência empírica e apresentar justificações dedutivas, nomeadamente, baseadas em coerência lógica, num exemplo genérico ou num procedimento ou propriedade matemática (Artigo IV). Particularmente, nas justificações dedutivas, alternar entre níveis de justificação promove situações que clarificam as ideias matemáticas em causa (Artigo IV), o que contribui para o conhecimento matemático dos alunos (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2017).

Como emergem as justificações. Um dos aspetos mais proeminentes sobre a justificação dos alunos é a necessidade do questionamento para que estes apresentem justificações. Em grande parte das situações, tanto no estudo inicial como ao longo das três intervenções, e tal como identificado na literatura (Galbrait, 1995; Henriques, 2010; James, Casas, & Grant, 2016; Ponte, 2007), as justificações dos alunos não surgem espontaneamente no trabalho autónomo de resolução da tarefa. Contudo, os alunos apresentam justificações decorrentes do questionamento, conseguindo identificar as propriedades e conceitos necessários à justificação (Artigo I).

Atendendo a que os alunos não justificam espontaneamente, surge a necessidade de promover a justificação, de onde decorre a formulação de dois princípios de design, um relacionado com as tarefas a propor e outro relacionado com os momentos de discussão coletiva. Quanto às tarefas, a própria natureza exploratória das questões (T1, T5) pode ter potencialidades para que os alunos justifiquem (Artigo I). Complementarmente, *Propor tarefas que incluam questões que permitem uma variedade de processos de resolução* [T6] pode, nos momentos de discussão coletiva, desencadear justificações (e.g., Artigo II, pp. 119-120; Brodie, 2010), assim como desencadear desacordos que emergem da diversidade de processos de resolução e que têm potencial para a aprendizagem (Wood, 1999).

Contudo, e com o intuito de reforçar as potencialidades de as tarefas desencadearem justificações, o professor deve *Propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução* [T4]. Ainda que este princípio possa ser insuficiente para que surjam justificações dos alunos, não só pode desencadear justificações (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011), como pode servir como ponto de partida para que essas justificações surjam nos momentos de discussão coletiva. Assim, complementarmente, o professor deve *Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva* [A2]. Este último princípio, decorrente da articulação entre a literatura (Bell, 2011) e o estudo inicial (Artigo I), foi reajustado ao longo das intervenções de acordo com as ações do professor analisadas. Primeiramente o princípio perde a especificidade referente aos momentos de resolução da tarefa e de discussão coletiva, alargando-se assim a qualquer momento em sala de aula como os restantes princípios para as ações do professor, simplificando-se para *Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas* [A2′]. Posteriormente, este princípio é alargado ao incluir não apenas a explicação do "porquê", mas também outros pedidos de justificação, referindo que as ações do professor devem passar por *Propor situações que levem os alunos a justificar e apresentar justificações alternativas* [A2″]. Esta última reformulação do princípio pretende ainda reforçar a importância da justificação, que pode ir além da explicação do "porquê".

As justificações apresentadas pelos alunos nas várias intervenções desta IBD emergem muitas vezes associadas a este último princípio (A2, A2′, A2″), ainda que, por vezes, em articulação com uma valorização de contribuições incorretas ou parciais (A6, A8). As justificações decorrentes destes princípios são suscitadas por ações de guiar e de desafiar por parte do professor (Artigo II, Artigo III, Artigo IV). Contudo, o desafio proposto pelo professor de explicar o "porquê" nem sempre leva a justificações por parte dos alunos, sendo necessário complementar este desafio com ações de guiar para que as justificações possam surgir (Artigo III). Tanto nesta sequência de ações, como em justificações que decorrem diretamente da ação inicial de desafiar, as justificações que tendem a surgir baseiam-se predominantemente em procedimentos matemáticos e ideias ou conceitos conhecidos (Artigo IV). Contudo, estas justificações são por vezes incompletas (e.g., Artigo IV) ou inválidas (e.g., Artigo III), pois, tal como em investigações anteriores (Galbrait, 1995), os alunos fundamentam-se em informação matemática disponível que nem sempre é adequada à situação proposta na tarefa ou na discussão coletiva.

Com o intuito de contribuir para que os alunos identifiquem a validade das suas justificações e das justificações dos colegas (Bell, 2011; Francisco & Maher, 2011), é definido o princípio de *Destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida* [A3]. Este princípio é posteriormente refinado, atendendo à análise retrospetiva dos primeiro e segundo ciclos de design, para *Propor situações que levem os alunos a identificar justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida* [A3']. Este refinamento é feito essencialmente na sua formulação, de modo a melhor se adequar às ações do professor que emergem no contexto de discussões coletivas. Assim, o princípio (A3′) pretende considerar pedidos explícitos, mas também pedidos implícitos de validação da justificação. Esta reformulação tem ainda implicações no princípio de *Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização* [A9′], pois o destaque referente à justificação (A9) considera-se abrangido pelo princípio A3′.

Tal como referido nas ações gerais do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos, também as justificações válidas que surgem ao longo das três intervenções tendem a decorrer de uma sequência de ações. Neste sentido, sequências de ações do professor contribuem para complementar e corrigir justificações apresentadas inicialmente de forma errada (Franke et al., 2009). Quando se trata de uma justificação associada a uma generalização formulada durante o trabalho autónomo dos alunos, esta emerge fundamentalmente de ações de convidar e de guiar (Artigo II). Contudo, a sequência de ações deixa de ser linear quando oferece oportunidades aos alunos para justificar e completar as suas justificações, para passarem de justificações inválidas para justificações incompletas ou para apresentarem justificações alternativas (Artigo III). Nestas situações, parecem contribuir combinações de ações de apoiar, guiar e desafiar onde, em grande parte das situações, as ações de desafiar ou de guiar são as que desencadeiam a sequência de ações que promove a justificação. Particularmente, quando surge uma justificação inválida, a contribuição dos alunos é valorizada e a ação central da professora é de desafiar quando é proposto aos alunos que abandonem a justificação apresentada e apresentem uma nova justificação, ou é de guiar no sentido de reformular a justificação para que se torne válida (Artigo IV).

Estas sequências de ações, ao dependerem da perceção do professor sobre o apoio necessário para que os alunos mobilizem conhecimento (Artigo IV), podem desencadear situações em que é necessário ajustar ou suspender o desafio feito aos alunos por estes não terem as ferramentas necessárias para justificar (Artigo III). Nestas situações, *Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa* [A1] parece não ser adequado. Assim, este princípio, decorrente da literatura (e.g., Brodie, 2010), é reservado apenas a algumas situações em sala de aula.

Com o intuito de que os alunos apresentem justificações válidas e cada vez mais formais e complexas, é definido o princípio *Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos* [A4]. No entanto, este princípio do primeiro ciclo de design tem pouca repercussão nas ações do professor nos momentos de discussão coletiva. Assim, proponho uma outra abordagem à demonstração, que pode passar pela justificação como atividade coletiva promovida no âmbito da discussão de tarefas, que permite aos alunos partilhar, debater e clarificar o seu raciocínio (Galbrait, 1995). No âmbito desta abordagem, o princípio A4 deixa de ser central e passa a encontrar-se implícito noutros princípios diretamente relacionados com a justificação (T4, A2′, A2″, A3, A3′, A9) ou de construção da justificação (A6, A8). Neste sentido, o que se procura é que as justificações sejam cada vez mais formais e complexas. No terceiro ciclo de design, são visíveis as oportunidades para os alunos avançarem entre níveis de justificação, tanto em formalidade como em complexidade, decorrentes dos princípios de design em que são solicitadas justificações (A2″), a avaliação dessas justificações (A3′) e aceites e valorizadas justificações parciais ou incorretas (A8). Estas situações reforçam, assim, que os princípios de design podem promover justificações próximas da demonstração ou aceites como demonstração (Yopp & Ellsworth, 2016), sem a necessidade da abordagem direta à demonstração (A4).

6 Conclusão

Princípios para promover o raciocínio matemático dos alunos na sala de aula

Um dos aspetos fundamentais para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula é conhecer o raciocínio e os seus processos. Particularmente, conhecer características de generalizações e justificações enquanto processos centrais do raciocínio matemático. Outro aspeto fundamental é conhecer as características das tarefas a propor e as ações do professor que promovem o raciocínio matemático dos alunos. É atendendo a estes dois aspetos fundamentais que a conjetura e os princípios de design são estruturados e refinados e que procuro dar resposta ao objetivo da investigação de compreender de que modo o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

No que respeita aos processos de raciocínio matemático dos alunos, destaco que a generalização emerge no contexto de vários tópicos matemáticos e de abordagens indutivas, abdutivas e dedutivas. Deste modo, é importante salientar que as generalizações não são exclusivas de determinados tópicos matemáticos (como as sequências), nem decorrem necessariamente de casos particulares para uma formulação geral. Já para a justificação, destaco a classificação proposta no Artigo IV e retomada na secção *Raciocínio matemático* deste *kappa*, que considera justificações com diferentes níveis de formalidade e complexidade. Esta classificação permite não só analisar as justificações dos alunos em sala de aula, como também ilustrar as potencialidades da articulação de justificações de diferentes níveis. Assim, saliento a importância de visar justificações de níveis cada vez mais formais e mais complexos, com a salvaguarda de tais justificações se poderem basear em justificações menos formais e complexas que permitam uma melhor compreensão dos conceitos, propriedades e ideias matemáticas em questão.

Para que possam emergir estas generalizações e justificações em sala de aula, as tarefas a propor são de particular importância. Assim, tarefas de natureza exploratória, que considerem diferentes graus de desafio, que permitam uma variedade de processos de resolução e que incitem generalizações e justificações, são promissoras para promover o raciocínio matemático dos alunos. Contudo, estas características das tarefas não podem ser olhadas isoladamente, pois os momentos de discussão coletiva são fundamentais para apresentar, clarificar, complementar e aprofundar os processos de raciocínio matemático decorrentes do trabalho realizado a partir dessas tarefas. E nestes momentos de discussão coletiva, as ações do professor são primordiais para promover adequadamente o raciocínio matemático dos alunos.

O quadro conceptual sobre as ações do professor (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013) mostrou-se útil na análise e descrição das ações do professor nesta IBD (Artigo II, Artigo III, Artigo IV) ao longo dos vários ciclos de design. Este quadro, além de permitir uma análise detalhada das ações do professor em articulação com os princípios de design para as ações do professor, permite uma visão abrangente dos modos como as ações do professor podem suscitar ambientes de sala de aula desafiadores onde se promove o raciocínio matemático dos alunos. Pela estreita relação entre os princípios de design para as ações do professor e as ações do professor propostas por este quadro conceptual, a formulação final dos princípios de design para as ações do professor visa integrar este quadro conceptual. Assim, os princípios A2″, A3′ e A8, passam a considerar na sua formulação as ações do professor do quadro conceptual que mais se adequam a cada princípio, sendo que os princípios A9′ e A7″ já integravam ações deste quadro conceptual.

Ainda quanto aos princípios para as ações do professor, considerando que o que pretendo neste estudo é encontrar os princípios necessários para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, opto na formulação final da conjetura por retirar o princípio A1. Esta opção, decorrente da discussão que apresento anteriormente sobre este princípio, prende-se essencialmente com dois motivos. Por um lado, o primeiro princípio para as tarefas (T1/T5) pressupõe a existência de diferentes graus de desafio. Por outro lado, há situações em que pode ser necessário ajustar o desafio de modo a que os alunos possam progredir nas suas respostas.

Deste modo, procurando corresponder ao objetivo deste estudo e considerando a generalização e a justificação como processos centrais do raciocínio matemático dos alunos, formulo a seguinte conjetura para promover o raciocínio matemático em sala de aula:[4]

Uma intervenção que contribui para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, considera e articula os seguintes princípios de design:

[4] Uma síntese de todas as alterações realizadas aos princípios de design desde a sua formulação inicial até à que aqui apresento pode ser encontrada no Anexo 6.

Para as tarefas:

- Propor tarefas que incluam uma diversidade de questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios;
- Propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações;
- Propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução;
- Propor tarefas que incluam questões que permitem uma variedade de processos de resolução.

Para as ações do professor:

- Apoiar ou desafiar os alunos a justificar ou apresentar justificações alternativas;
- Apoiar ou informar os alunos para identificar justificações válidas ou inválidas, enfatizando o que as valida;
- Desafiar ou apoiar os alunos na partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique;
- Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização;
- Desafiar os alunos a ir além da tarefa.

Reflexão final

Sobre a natureza metodológica. Ao longo deste estudo, as características definidas para a IBD tiveram um papel fundamental. Assim, as opções tomadas ao longo dos vários ciclos de design resultam, por um lado, em limitações do estudo e, por outro lado, em contributos importantes para a investigação.

Dada a natureza interventiva da IBD, os elementos considerados para a intervenção são de extrema importância. Contudo, é também o trabalho próximo com o professor que permite não só refinar estes elementos, mas também contribuir para o sucesso da intervenção, pois este trabalho ajuda o professor “a interagir com os alunos em tarefas que suportem o raciocínio matemático dos alunos” (Brodie, 2010, p. 20). Ao longo do estudo é possível compreender a importância do trabalho de articulação com o professor, tanto para informar a intervenção, como para informar a própria investigação. Quanto a este último ponto, as reuniões com a professora antes e depois das aulas são de extrema importância para compreender a sua própria interpretação dos processos de raciocínio que emergem em sala de aula. Contudo, esta proximidade entre o investigador e o professor pode também ser uma limitação ao uso dos princípios de design. Por um lado, o professor pode mostrar uma preocupação em dar resposta ao pretendido com a investigação descurando a preocupação em adequar estes princípios aos seus alunos. Por outro lado, não é possível com uma investigação com esta proximidade entre professor e investigador compreender se a utilização dos princípios de design sem o acompanhamento do investigador pode igualmente promover o raciocínio matemático dos alunos.

Numa IBD, um dos objetivos que se pretende alcançar é a evidência de que os resultados obtidos ao longo do processo decorrem das características da intervenção (Cobb et al., 2016). Importa ressalvar que um ambiente com maior controlo sobre os fatores que influenciam a aprendizagem dos alunos poderia refletir-se em resultados que derivassem mais diretamente da abordagem usada (Brown, 1992). Contudo, num ambiente mais controlado perder-se-ia uma parte muito significativa do propósito desta investigação. Na verdade, por um lado, as ações dos atores são melhor compreendidas quando observadas no seu ambiente natural (Bogdan & Biklen, 19994); por outro lado, a intervenção em sala de aula permite recolher evidências de situações em que o raciocínio matemático dos alunos decorre de momentos de discussão coletiva orientados pelos princípios de design. Assim, nesta IBD, a análise das relações entre os princípios de design e as tarefas e ações do professor pretende contribuir para o objetivo alusivo às evidências acima referidas. Atendendo a que os professores tendem a não ter uma ideia clara das situações e das ações que podem constituir um ambiente promissor para promover o raciocínio matemático dos alunos (Kosko et al., 2014), estas evidências podem ainda contribuir para esse conhecimento.

Neste estudo, a escolha das professoras resultou em alguns imprevistos que determinaram aspetos relevantes da IBD. Por diversos motivos, não foi possível que a professora participante no primeiro ciclo de design participasse também nos restantes ciclos da IBD. Deste imprevisto decorreu a seleção da professora participante nos segundo e terceiro ciclos de design. Esta mudança de professora participante teve como principal aspeto crítico a alteração do contexto da intervenção do primeiro para o segundo ciclo de design. Este aspeto pode, contudo, ser encarado como uma desvantagem ou como uma vantagem. Por um lado, o conhecimento da professora sobre a investigação poderia ter contribuído para facilitar a preparação e intervenção do segundo ciclo de design. Por outro lado, a escolha de outra professora permitiu novos contributos para os princípios de design, enriquecendo a investigação. Já do segundo para o terceiro ciclo de design, ainda que a professora se tenha mantido, houve uma mudança de escola, o que levou a que o terceiro ciclo decorresse uma vez mais no 7.º ano e, consequentemente, na mesma unidade de ensino. Também este imprevisto resultou em desvantagens e vantagens pois, por um lado, limitou os tópicos nos quais o estudo intervém e, por outro lado, permitiu aprofundar aspetos de um mesmo tópico. Estes imprevistos, juntamente com a opção por realizar três ciclos de design, permitiram ainda uma análise sobre o design a vários níveis: em tópicos matemáticos distintos, nos mesmos tópicos matemáticos, utilizados por professores distintos e utilizados pelo mesmo professor em contextos escolares distintos. Assim, tanto as opções metodológicas tomadas, como as opções metodológicas decorrentes dos imprevistos referidos contribuíram para enriquecer este estudo.

Sobre o raciocínio matemático. O estudo em torno do raciocínio matemático dos alunos está longe de se esgotar, quer no âmbito da conceptualização do que se entende por raciocinar matematicamente na Matemática escolar, quer no âmbito de como o promover na sala de aula. Este estudo apresenta contributos para esta temática de investigação em Educação Matemática, nomeadamente a formulação da conjetura e princípios de design que visam promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula. Este estudo contribui também para o conhecimento específico sobre os processos de raciocínio matemático.

Primeiramente, ao encarar a generalização como um processo de raciocínio matemático transversal a vários tópicos, esta investigação não se centra apenas na generalização da estrutura de sequências e contribui, assim, para "retomar o foco na generalização da . . . estrutura da álgebra" (Warren et al., 2016, p. 100).

Um segundo aspeto a destacar é o foco deste estudo nos processos de generalização e justificação enquanto processos centrais do raciocínio matemático. Estudos recentes têm destacado também estes processos como processos centrais para a aprendizagem da Matemática e, particularmente, como contributo para os processos de significação dos alunos (e.g., Palatnik & Koichu, 2017).

Um outro aspeto a destacar no âmbito da conceptualização sobre o raciocínio matemático, é a pertinência da articulação entre a natureza das inferências e os processos de raciocínio matemático, também referida recentemente por Jeannotte e Kieran (2017) como "duas formas diferentes de olhar para um dado discurso que estão relacionadas dialeticamente" (p. 14). Estas autoras destacam, tal como neste estudo, inferências indutivas, abdutivas e dedutivas e processos de raciocínio como generalizar, justificar e demonstrar.

Como último aspeto, importa salientar que os documentos de trabalho mais recentes da Comissão Europeia (EC, 2018) apontam que "o raciocínio matemático é essencial para um vasto leque de atividades diárias, tarefas e profissões. E é também central em áreas de estudo académicas como a sociologia, psicologia, história, geografia, economia ou política" (p. 48), sendo ainda destacado também como fundamental na área da educação financeira, da tecnologia e da engenharia. Deste modo, promover o raciocínio matemático em sala de aula é essencial para desenvolver nos alunos competências essenciais para a aprendizagem ao longo da vida.

A concluir. Ainda que seja importante partilhar intervenções sobre o raciocínio matemático e o que estas intervenções podem alcançar (Brodie, 2010), será igualmente importante, em futuras investigações, aprofundar ou alargar o âmbito desta investigação e respetivas intervenções.

Neste estudo, opto por aprofundar a análise quanto aos processos de raciocínio matemático de justificar. Paralelamente, será interessante aprofundar a análise quanto à generalização, atendendo à sua centralidade no raciocínio matemático e na Matemática enquanto ciência e enquanto disciplina. Complementarmente, investigações futuras com intervenções noutros tópicos matemáticos ou noutros níveis de ensino, que visem generalizações e justificações, poderão robustecer a conjetura e os princípios de design, assim como o conhecimento sobre o modo de promover o raciocínio matemático na sala de aula.

Na presente investigação, o conjunto de princípios de design constitui um ambiente promissor para desenvolver a habilidade dos alunos de fazerem generalizações e justificações apropriadas. E, ao generalizarem e justificarem, os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático e podem estar melhor equipados para mais tarde lidarem com a demonstração matemática. Contudo, uma só intervenção como as de cada um dos ciclos de design desta investigação certamente não é suficiente para dotar os alunos de todas as ferramentas necessárias para desenvolverem e compreenderem a demonstração matemática (Jahnke & Wambach, 2013). Assim, será importante aprofundar não só o que pode promover a demonstração matemática em sala de aula, como também investigar intervenções não limitadas a um só tópico matemático.

Por fim, atendendo a que os professores precisam de apoio e recursos para promover o raciocínio matemático na sala de aula (Stylianides, 2007a), pode constituir um importante desafio compreender como é que a conjetura e os princípios de design propostos podem informar processos de desenvolvimento profissional.

Referências

AERA (2011). Code of ethics. *Educational Researcher, 40*(3), 145-156. doi:10.3102/0013189X11410403

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese*, *134*(1-2), 25-44. doi:10.1023/A:1022127429205

Arcavi, A. (2005). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, Caminha*. Obtido de http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2005/2005_03_AArcavi.pdf

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Netherlands: Kluwer.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções* (Dissertação de Mestrado). Obtido de http://hdl.handle.net/10451/3435

Babai, R., Eidelman, R. R., & Stavy, R. (2012). Preactivation of inhibitory control mechanisms hinders intuitive reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 763-775. doi:10.1007/s10763-011-9287-y

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.) *Mathematics, teacher and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: NCTM.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school Algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher, 104*(9), 690-695.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v-vii). New York: Springer. doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* Boston, MA: Springer. doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 13-58. doi:10.1007/s10649-005-2532-y

Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. The Journal of the Learning Sciences, 2(2), 141-178.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22. doi:10.1007/s11858-007-0067-7

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374. doi:10.1007/s10857-011-9179-7

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Shauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. doi:10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Third edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Coffland, D. A. (2012). Closing in on proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(8), 494-500.

Cohen, D. K., & Ball, D. L. (1999). *Instruction, capacity, and improvement* (CPRE Research Report Series RR-43). Obtido de Consortium for Policy Research in Education website: http://cpre.org/instruction-capacity-and-improvement

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42. doi:10.1207/s15327809jls1301_2

Conner, A. M., Singletary, L, Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in*

Mathematics, 86(3), 401-429. doi:10.1007/s10649-014-9532-8

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer.

Ellis, A. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308-345.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

European Commission. (2018). *Proposal for a Council recommendation on key competences for lifelong learning* (Commission staff working document, 17.1.2018). Obtido de https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/swd-recommendation-key-competences-lifelong-learning.pdf

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(1), 49-66. doi:10.1007/s10857-010-9144-x

Franke, M., Webb, N., Chan, A., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teaching Education*, *60*(4), 380-392. doi:10.1177/0022487109339906

Galbrait, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412-417.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 14-19.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp.805-842). Reston, VA: NCTM.

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de Doutoramento). Obtido de http://hdl.handle.net/10451/2465

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (2016) *Carta Ética para a Investigação* *em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Obtido de http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica

James, C., Casas, A., & Grant, D. (2016). Using scaffolding to scale-up justifications. *Mathematics Teaching in the Middle School, 22*(5), 294-301.

Janesick, V. (1994). The dance of qualitative research design. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 209-219). Thousand Oaks, CA: Sage.

Jahnke, H.N., & Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM*, *45*(3), 469-482. doi:10.1007/s11858-013-0502-x

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. doi:10.1007/s10649-017-9761-8

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation.* Newbury Park, CA: Sage.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum/NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth yearbook* (pp. 3-18). Reston, VA: NCTM.

Knuth, E., Chopin, J., & Bieda, K. (2009). Proof: Examples and behond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 206-211.

Kosko, K., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26*(3), 459-476. doi:10.1007/s13394-013-0116-1

Krussel, L., Edwards, B., & Springer, G.T. (2004). The teacher's discourse moves: A framework for analyzing discourse in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics, 104*(7), 307-312. doi:10.1111/j.1949-8594.2004.tb18249.x

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.*

Reston, VA: NCTM.
Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. doi:10.1207/s15327833mtl0703_3
Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190. doi:10.1023/A:1003956417456
Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi:10.1007/s10649-007-9104-2
Martino, A., & Maher, C. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53-78. doi:10.1016/S0732-3123(99)00017-6
Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações* (Dissertação de Mestrado). Obtido de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/7570
Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, XXI*(2), 81-110.
Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. doi:10.1007/s10649-017-9773-4
Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018a). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema, 32*(62) (aceite para publicação a 17/05/2018).
Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018b). Teacher's actions to promote students' justification. *Acta Scientiae 20*(3), 487-505.
ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.
MEC (2012). *Metas curriculares do ensino básico – Matemática*. Obtido de http://www.dge.mec.pt/data/dgidc/noticias/Metas/Metas_EB_Matematica_final.pdf
MEC (2013). *Programa e Metas curriculares: Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 223-239.

doi:10.1007/s10649-016-9720-9

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: Autor.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Dissertação de mestrado). Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430. doi:10.1007/s11858-007-0054-z

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar práticas educativas. *Quadrante, XXV*(2), 77-98.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66. doi:10.1007/s10649-016-9681-z

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In APM (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70. doi:10.1207/S15327833MTL0501_02

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics*

Teacher in the Middle School, 15(4), 213-221.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 449-467. doi:10.1007/BF00315610

Schliemann, A., Lessa, M., Lima, A., & Siqueira, A. (2003). Young children's understanding of equivalences. In A. Schliemann, D. Carraher & B. Brizuela (Eds.) *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice* (pp. 37-56). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Selling, S. K. (2016). Making mathematical practices explicit in urban middle and high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(5), 505-551.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(3), 205-233. doi:10.1023/A:1020134209073

Smith, E. R. (1908). Elementary logic as a basis for plane Geometry. *The Mathematics Teacher, 1*(1), 6-14.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. doi:10.1080/10986060802229675

Stylianides, A. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20. doi:10.1007/s10649-006-9038-0

Stylianides, A. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Stylianou, D., & Blanton, M. (2011). Developing students' capacity for constructing proofs through discourse. *Mathematics Teacher, 105*(2), 140-145.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Rotterdam: Sense Publishers.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Wood, T., & Berry, B. (2003). What does "design research" offer mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 195-199. doi:10.1023/A:1025180118053

Yopp, D., & Ellsworth, J. (2016). Generalizing and skepticism: Bringing research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 22*(5), 284-292.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM, 40*(1), 131-141. doi:10.1007/s11858-007-0065-9

Anexo 1

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, *XXI*(2), 81-110.

Versão dos autores

Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo

Joana Mata-Pereira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo. Neste artigo analisamos os processos de raciocínio de alunos do 3.º ciclo na resolução de tarefas de cunho algébrico envolvendo propriedades dos conjuntos numéricos **Z** e **R**. O quadro conceptual destaca como processos-chave do raciocínio matemático a generalização e a justificação, dando também atenção às representações e à significação. A metodologia é qualitativa, sendo estudados quatro alunos do 7.º e três do 9.º ano com dados recolhidos por entrevistas e observação na sala de aula (ambas com videogravação) e análise documental. Na formulação de generalizações, grande parte dos alunos segue uma abordagem indutiva, generalizando para uma classe de objetos mais ampla as relações observadas em casos particulares. Verificam-se também situações de raciocínios abdutivos. A generalização é mais imediata nos alunos do 9.º ano, que evidenciam por vezes generalizações de cunho dedutivo. A atividade de justificar não é espontânea nos alunos, mas decorrente do questionamento, os alunos mostram ser capazes de fazer justificações baseada em conhecimentos anteriores, em propriedades ou conceitos matemáticos e contraexemplos que refutem uma afirmação.

Palavras-chave. Raciocínio matemático, Álgebra, Números inteiros, Números reais

Abstract. This article aims to analyse grade 7 and grade 9 students' mathematical reasoning while working on tasks involving properties of number sets **Z** and **R**. The conceptual framework emphasises generalization and justification as key aspects of mathematical reasoning, and also considers representations and sense making. The methodology is qualitative and data collection includes interviews and observation of classes (both video-recorded) and analysis of written tasks of four grade 7 students and three grade 9 students. Making generalization, most students follow an inductive approach, generalizing the relations observed in particular cases to a larger class of objects. There are also instances of abductive reasoning. Grade 9 students generalize in a more effective way and sometimes these generalizations have a deductive nature. Justifying is not done spontaneously, but, in response to teacher's questioning, students show to be able to make justifications based on previous knowledge of properties or mathematical concepts and based on counterexamples that refute a statement.

Keywords. Mathematical reasoning, Algebra, Integers, Real numbers.

Introdução

Na nossa sociedade, faz parte do senso comum considerar que a Matemática desenvolve o raciocínio. No entanto, o próprio raciocínio é necessário para a compreensão desta ciência. Para compreender um conceito em Matemática não basta conhecer a sua definição, requer também perceber o modo como o conceito se relaciona com outros conceitos e como pode ser usado. A compreensão de procedimentos envolve perceber a razão por que funcionam, como podem ser utilizados e como podem ser interpretados os seus resultados (NCTM, 2009). Deste modo, desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos não se resume a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros. Pelo contrário, centrar a aprendizagem na memorização promove nos alunos uma visão da Matemática como um conjunto de regras desconexas e não como uma ciência lógica e coerente (ME, 2007).

A importância do raciocínio matemático é sublinhada por Russel (1999), que indica o seu lugar central na aprendizagem da Matemática. O atual *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007) também destaca o raciocínio matemático que apresenta como capacidade transversal a desenvolver ao longo da escolaridade. Os objetivos de aprendizagem para o 3.º ciclo incluem, nomeadamente: (i) formular, testar e demonstrar conjeturas; (ii) distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjetura e fazer demonstrações simples; (iii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; (iv) compreender o papel das definições em Matemática; (v) distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; e (vi) selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (ME, 2007).

Promover o raciocínio matemático dos alunos é um aspeto central do trabalho do professor (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011) que, no entanto, tem sido muito pouco investigado. Para progredirmos na compreensão desta questão, um passo fundamental é conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos. Assim, o nosso objetivo é analisar os processos de raciocínio de alunos do 7.º e 9.º anos na resolução de tarefas de cunho algébrico envolvendo propriedades dos conjuntos numéricos **Z** e **R**. Pela sua importância, centramos a nossa atenção na generalização e na justificação enquanto processos-chave de raciocínio matemático e consideramos as representações usadas e os processos de significação envolvidos, dada a sua estreita relação com o raciocínio.

Raciocínio matemático

Generalização e justificação

Raciocinar é fazer inferências, ou seja, usar a informação existente para chegar a novas conclusões. Assim, Oliveira (2008) carateriza o raciocínio matemático como “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)” (p. 3). No entanto, esta caraterização acomoda perspetivas diversas sobre o raciocínio matemático. Por exemplo, Aliseda (2003) identifica este raciocínio com inferência lógica, caraterizada pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões, concebendo o raciocínio matemático numa perspetiva dedutiva. Outros autores, alargam o raciocínio matemático ao campo indutivo, em que se formula uma generalização a partir da identificação de uma certa característica comum a diversos casos, e abdutivo, em que se formula uma generalização estabelecendo uma relação entre diversos aspetos de certa situação (Rivera & Becker, 2009). Por exemplo, Russel (1999) refere que, na aprendizagem da Matemática, o raciocínio é “o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos” (p. 1). Também Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que o raciocínio matemático é “um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 10). Deste modo, raciocinar matematicamente pode dizer respeito tanto a aspetos lógicos como a processos intuitivos, incluindo a formulação de novas ideias e a consecução e validação de novas conclusões.

Os processos de raciocínio incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a realização de justificações. Conjeturar consiste em raciocinar sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que têm o intuito de ser verdadeiras, mas que não se conhecem como tal (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011). Ao fazê-lo, os alunos identificam pontos comuns entre vários casos, desenvolvendo generalizações que os levam a usar e clarificar o significado de conceitos, símbolos e representações. Muito mais do que afirmações sobre objetos particulares, a Matemática procura fazer afirmações gerais sobre grandes classes de objetos. Por isso, a generalização constitui uma modalidade particularmente importante de formulação de conjeturas.

Na formulação de generalizações, Galbraith (1995) distingue entre os alunos que seguem abordagens empíricas, testando alguns casos, e os que seguem uma abordagem dedutiva. Nos que seguem abordagens empíricas, este autor distingue ainda dois grupos: os que fazem testes ao acaso, de modo arbitrário, e aqueles em que a escolha dos casos a testar é guiada pela sua compreensão do domínio da conjetura que está a ser testada. Por seu lado, os alunos que seguem abordagens dedutivas enfrentam três etapas: (i) "reconhecer a relevância de um certo princípio externo"; (ii) "reconhecer o modo em que o princípio é útil"; e (iii) "aplicar o princípio apropriadamente" (Galbraith, 1995, pp. 415-6), podendo o insucesso ou o erro ocorrer em qualquer das etapas.

No final do ensino básico, espera-se que os alunos sejam capazes de justificar afirmações apoiando-se em procedimentos, propriedades e definições matemáticas (ME, 2007). Contudo, os resultados de investigação realizada em diversos países indicam que "apenas a um nível avançado os alunos reconhecem a necessidade de raciocínio convincente com base num conjunto de pressupostos explícitos" (Galbraith, 1995, p. 412). Por isso, é necessário que os alunos sejam incentivados a apresentar justificações, ainda que sem o rigor associado à demonstração matemática formal. Como indicam Lannin, Ellis e Elliot (2011), deve procurar-se que os alunos (i) façam justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já compreendidas anteriormente, (ii) justifiquem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa, (iii) avaliem a validade dos argumentos utilizados, (iv) tenham presente que uma justificação matemática não é um argumento baseado na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares, e (v) procurem justificar o porquê de uma generalização ser verdadeira ou falsa investigando quais os fatores que podem influenciar essa generalização. No que respeita à refutação de afirmações, Galbraith (1995) indica que os alunos mostram muitas vezes dificuldade em compreender que um contraexemplo de uma afirmação matemática deve satisfazer as condições dadas e violar as suas conclusões e também dificuldade em aceitar que um só caso seja suficiente para refutar uma afirmação. Por seu lado, Lithner (2000, 2003, 2008), em diversas investigações sobre os processos de raciocínio dos alunos, indica que estes, na resolução de tarefas, tendem a focar-se sobretudo no que lhes é familiar e no que recordam a um nível superficial, dando pouca atenção às propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos, mesmo quando estes poderiam proporcionar fortes progressos. Refere que, nos poucos casos em que as estratégias dos alunos se apoiam em conceitos matemáticos relevantes, o raciocínio tende a ser dominado por imagens guardadas na memória e por rotinas familiares. Assumindo que a explicação e justificação de conclusões permitem aos alunos evidenciar e esclarecer o seu raciocínio (NCTM, 2007), cabe ao professor criar situações em que a justificação tenha um papel central.

Azevedo (2009) procura compreender como se desenvolvem os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano com diferentes níveis de desempenho escolar em Matemática, a partir do trabalho numa unidade de ensino sobre Funções. Os resultados sugerem que os alunos, para além da aprendizagem com significado das funções, desenvolveram diversos aspetos da sua capacidade de raciocínio: (i) a realização de tarefas de exploração e investigação promoveu a identificação de regularidades e a formulação, teste e justificação de conjeturas; (ii) a realização de relatórios escritos e apresentações orais desenvolveu a capacidade de justificar processos e a compreensão da sua necessidade; e (iii) as discussões e reflexões sobre a resolução das tarefas promoveram a clarificação de pensamentos intuitivos e alargamento das estratégias usadas pelos alunos. Também Henriques (2011), ao analisar os processos de raciocínio de alunos do ensino superior no quadro de uma experiência de ensino baseada na resolução de problemas e na realização de atividades de investigação, considera que as tarefas propostas aos alunos permitiram-lhes o contacto com diversos processos matemáticos, como a formulação de questões e conjeturas, o teste e a justificação de conjeturas e levam-nos a compreender a necessidade de justificar as conjeturas que pensam ser verdadeiras.

Um quadro conceptual para a análise do raciocínio que relaciona a generalização e a justificação com os raciocínios indutivo e dedutivo, bem como com a formulação de questões e conjeturas encontra-se na Figura 1. O raciocínio matemático, correspondendo à zona central da figura, apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*). Atendendo à impossibilidade de aceder diretamente ao raciocínio dos alunos, as representações que estes usam para comunicar esse raciocínio são fundamentais. Por outro lado, os processos de significação em articulação com o raciocínio matemático são essenciais para uma compreensão efetiva da Matemática (NCTM, 2009). Os raciocínios indutivo e abdutivo ocorrem sobretudo durante a formulação de conjeturas, enquanto o raciocínio dedutivo tem lugar em especial durante o teste e a justificação.

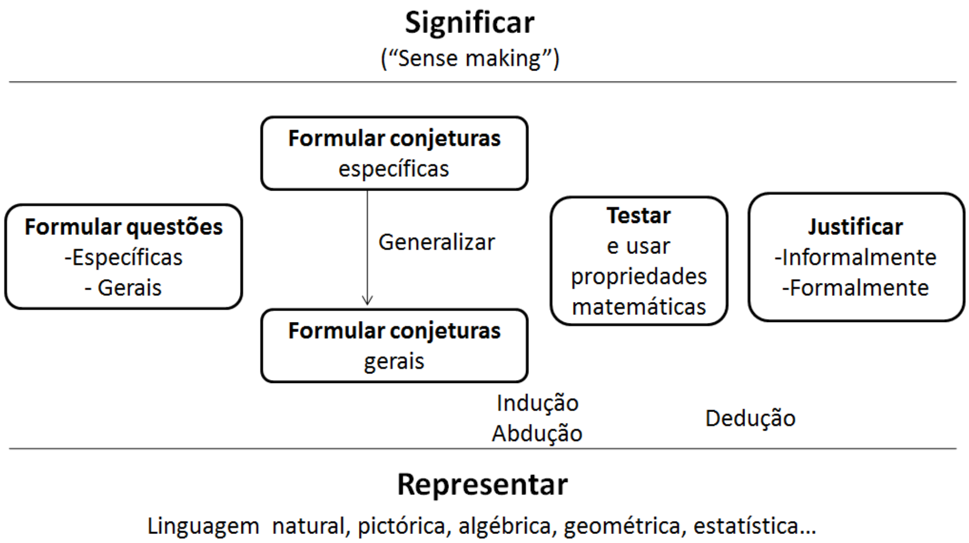


Figura 1 – Quadro conceptual para o estudo do raciocínio matemático (adaptado de Mata-Pereira & Ponte, 2011).

Representação e significação

O programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) salienta o importante papel das representações matemáticas em toda a aprendizagem, sugerindo que "o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (p. 9) e destacando a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar diferentes representações. Ao acederem às representações matemáticas e às ideias que estas expressam, os alunos adquirem um conjunto de ferramentas que ampliam a sua capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2007). Deste modo, compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos só é possível ao observar as suas representações (NCTM, 2007).

Tal como o raciocínio matemático, também a representação é um conceito complexo que pode ser abordado de diversos modos. Por exemplo, Goldin (2008) considera que uma representação é uma configuração que pode substituir, sugerir ou simbolizar um objeto que está a ser representado. Pelo seu lado, Duval (2006) destaca que os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação, sublinhando que este é um dos maiores problemas na compreensão matemática pois não é possível aceder a um objeto matemático sem ser através das suas representações.

Ambos os autores distinguem representações externas e internas. Goldin (2008) salienta que as representações internas se relacionam com os sistemas de representação psicológica dos indivíduos que não podem ser diretamente observadas por terceiros. Este autor indica que as representações internas constituem sistemas interrelacionados que permitem ao indivíduo produzir um vasto leque de representações externas. Duval (2004, 2006) refere duas transformações de representações externas distintas, os tratamentos e as conversões. Os tratamentos consistem em transformações dentro de um mesmo registo de representação, como resolver uma equação ou completar uma figura utilizando critérios de simetria. As conversões são transformações entre registos de representação, transformando a representação de um objeto, situação ou informação dada num dado registo numa representação num outro registo de representação. São exemplo de conversões a passagem de uma representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica ou a passagem de uma descrição ou de uma relação em linguagem natural para notação algébrica. Esta mudança de registo de representação nem sempre é simples, mas muitas vezes é necessária para uma compreensão adequada do objeto em questão. O desenvolvimento do raciocínio passa, assim, pela distinção entre representante e representado e pela diversificação e coordenação dos diferentes registos de representação (Duval, 2004).

Os processos de significação têm também um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático na medida em que, sem eles, não é possível estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjeturas. A significação consiste em estabelecer relações com o conhecimento existente de modo a desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito (NCTM, 2009), não se resumindo portanto ao estabelecimento de conexões. Neste sentido, tanto a significação pode ser assumida como um aspeto do raciocínio, como o raciocínio pode ser assumido como um aspeto da significação. A significação, como aspeto do raciocínio, contribui para identificar elementos comuns em determinadas observações e perceber como tais elementos estabelecem conexões com situações anteriores (NCTM, 2009). O raciocínio dedutivo, enquanto aspeto da significação, ajuda a compreender o significado do que está a ser demonstrado, a ver o que é verdade mas também porque é verdade (Hanna, 2000). Esta relação entre raciocínio e significação, interligando processos informais e formais, constitui uma base para o desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades dos alunos (NCTM, 2009). Deste modo, relacionar o raciocínio com as representações e a significação é essencial não só para o desenvolvimento do raciocínio mas também para a compreensão da Matemática.

Metodologia de investigação

O estudo apresentado neste artigo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), de observação participante (Jorgensen, 1989) em duas turmas, uma de 7.º e outra de 9.º ano, nas quais os professores trabalham com o atual programa de Matemática (ME, 2007). Ambas as turmas têm um ambiente de trabalho produtivo embora o desempenho dos alunos seja globalmente pouco satisfatório nesta disciplina. No 7.º ano, a investigadora (primeira autora) é professora da turma. A tarefa é desenvolvida na sala de aula durante a lecionação do tópico números inteiros e a recolha de dados é realizada dentro e fora da sala de aula, sendo entrevistados quatro alunos cujo desempenho se destaca claramente dos restantes, tendo em vista esclarecer os seus processos de raciocínio. Assim, a recolha de dados tem por base entrevistas individuais (videogravadas e denominadas E1-4), tendo em vista conhecer os processos de raciocínio dos quatro alunos, e secundariamente a observação das aulas (com registo de notas de campo). No 9.º ano, o trabalho foi realizado em colaboração com o professor de uma turma, que lecionou as respetivas aulas. A recolha de dados é realizada na sala de aula, durante a lecionação dos tópicos números reais e inequações, sendo a observação (com videogravação e denominada A1) realizada pela primeira autora que também acompanhou os alunos na realização das tarefas. Em ambos os casos é também realizada análise documental de produções escritas dos alunos. A mudança na estratégia da recolha de dados do 7.º ano para o 9.º ano teve em vista prestar maior atenção aos processos de raciocínio dos alunos no ambiente natural da sala de aula. Atendendo à dificuldade em conseguir uma observação aprofundada pelo próprio professor da turma, no papel de investigador, foi solicitada a colaboração de outro professor. Os dados assim recolhidos na sala de aula tornaram desnecessárias as entrevistas aos alunos do 9.º ano.

A tarefa apresentada aos alunos do 7.º ano integra uma questão subdividida em seis alíneas (Figura 2) cujo principal objetivo é levar os alunos a inferir algumas propriedades da multiplicação de números inteiros. As questões **a** e **b** pretendem que os alunos reconheçam que a multiplicação constitui uma estratégia mais eficaz que a adição sucessiva para a resolução de certos problemas. Em particular, a questão **b** visa a generalização da transformação da adição sucessiva de parcelas iguais numa multiplicação, a partir do seu conhecimento da propriedade análoga dos números naturais, já usada em ciclos anteriores. As questões **c**, **d**, **e** e **f** visam a associação da multiplicação de números inteiros à adição sucessiva de parcelas iguais de modo a que posteriormente os alunos identifiquem algumas propriedades da multiplicação neste conjunto numérico, nomeadamente quanto ao sinal do produto de dois números inteiros.

1. Dos números naturais aos números inteiros.
Observa as seguintes expressões:
$3+3+3+3+3+3+3+3+3$ $\qquad$ $7+7+7+7+7$

a. Determina o resultado das expressões. Explica como chegaste às respostas.

b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.

c. Representa as expressões seguintes utilizando a multiplicação:
$(-3)+(-3)+(-3)$ $\qquad$ $(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)$

d. Determina o resultado das expressões anteriores.

e. Determina o resultado das expressões seguintes:
$(-3)\times 5$ $\qquad$ $5\times(-2)$ $\qquad$ $(+4)\times(+6)$

f. Tenta encontrar uma regra que permita determinar a multiplicação de dois números inteiros se forem:
i. Ambos positivos
ii. Um negativo e um positivo
iii. Ambos negativos
Todos os números inteiros seguem a regra que encontraste? Investiga.

Figura 2 – Tarefa: Propriedades dos números inteiros (7.º ano)

No que se refere ao 9.º ano, debruçamo-nos sobre quatro questões de uma tarefa relativa ao tópico dos números reais que tem como principal objetivo explorar propriedades de expressões envolvendo operações com números reais e a raiz quadrada (Figura 3). A resolução da questão **2** implica uma análise cuidada da questão **1**, sendo insuficiente a aplicação direta de um procedimento de cálculo. A questão **2** e de modo mais explícito a questão **3** têm como objetivo a generalização de conclusões passíveis de obter na questão **1**. A questão **4** visa levar os alunos a verificar que nem todas as expressões envolvendo operações com números reais e raízes quadradas têm as mesmas propriedades, pretendendo-se que encontrem um contra exemplo para a afirmação apresentada, verificando que, apesar da primeira igualdade ser verdadeira, a sua generalização não o é.

1. Determina o valor exato das seguintes expressões:

a) $\sqrt{4 \times 16}$ **b)** $\sqrt{25 \times 144}$ **c)** $\sqrt{36 \times 2}$ **d)** $\sqrt{\frac{16}{4}}$

2. Observa atentamente os resultados obtidos em 1. Tenta encontrar uma regra que permita obter mais facilmente o valor das expressões:

a) $\sqrt{a \times b}$ (a e b não negativos) **b)** $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (a não negativo e b positivo)

3. Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

4. Observa a igualdade $\sqrt{1} + \sqrt{0} = \sqrt{1+0}$. Será que, para quaisquer valores reais a e b, é verdade que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Figura 3 – Tarefa: Propriedades dos números reais (9.º ano)

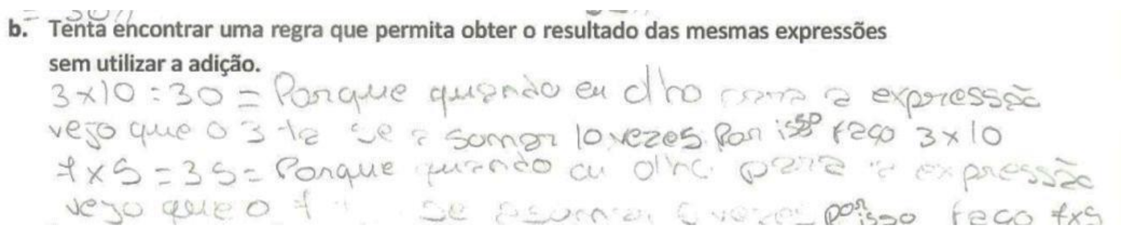
Neste artigo analisamos os dados relativos a quatro alunos da turma do 7.º ano e três alunos da turma do 9.º ano que, em ambos os casos, se situam entre os de melhor desempenho nas respetivas turmas, selecionados dada a expectativa de apresentarem raciocínios mais elaborados e interessantes. Atendendo ao objetivo do estudo, a análise dos dados é realizada segundo duas categorias referentes a processos de raciocínio, generalização e justificação. São ainda consideradas para a análise duas dimensões transversais, representações e processos de significação. Relativamente às representações e processos de significação analisamos os tipos de transformações usadas, nomeadamente tratamentos e conversões, bem como o desenvolvimento da compreensão da situação, contexto ou conceito.

Generalização

7.º ano

Os processos de generalização dos alunos do 7.º ano na resolução da tarefa são visíveis essencialmente nas questões **b**, **c** e **f**. Na questão **b** é solicitada uma generalização da propriedade que, no conjunto dos números naturais, permite a transformação de uma adição sucessiva numa multiplicação. Na questão **c** é necessária uma generalização da propriedade anterior ao conjunto dos números inteiros e, na questão **f,** uma generalização de algumas propriedades da multiplicação de números inteiros.

Ainda que a tarefa esteja construída com o intuito de promover tais generalizações, alguns alunos não as conseguem formular, como é o caso de Cátia na questão **b**, onde apresenta a multiplicação correspondente a cada uma das expressões, seguida de um esclarecimento em linguagem natural escrita (Figura 4).



b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.

3×10 = 30 = Porque quando eu olho para a expressão vejo que o 3 tá se a somar 10 vezes por isso faço 3×10
7×5 = 35 = Porque quando eu olho para a expressão vejo que o 7 [illegible] se a somar 5 vezes por isso faço 7×5

Figura 4 – Resolução de Cátia da questão **b.**

Questionada no sentido de obter uma generalização, a aluna apenas consegue apresentar a propriedade em questão recorrendo a casos particulares:

> *Investigadora:* E se eu quiser para um número qualquer, qual era a regra?
>
> *Cátia:* Então, fazia-se igual só mudava-se os números.
>
> *Investigadora:* Não, mas explica-me o que é isso de fazer igual, como é que fazias?
>
> *Cátia:* Contávamos cada número, como aqui, contamos cinco setes, então fazemos sete vezes cinco.
>
> *Investigadora:* (…) Mas voltaste a pegar neste exemplo (…) Diz-me, se eu tiver um número qualquer repetido não sei quantas vezes, como é que eu faço?
>
> *Cátia:* Fazemos o mesmo, contamos quantas vezes é que há o número e depois fazemos… Por exemplo, dois vezes vinte... (E1)

Cátia, nesta questão, tem facilidade nos tratamentos dentro da linguagem simbólica[5], visto que realiza a transformação da adição sucessiva para a multiplicação. Durante a resolução inicial e o questionamento apresenta facilidade nas conversões entre a linguagem simbólica sem variáveis e a linguagem natural escrita e oral. Estabelece uma conexão entre uma propriedade conhecida e a situação particular presente na questão, desenvolvendo uma compreensão parcial da situação referente aos casos apresentados. Por outro lado, a aluna, como outros colegas, parece não estar familiarizada com o conceito de regra matemática, o que pode explicar a sua dificuldade nesta questão. Neste sentido, a sua compreensão da questão é apenas parcial, visto que não estabelece todas as conexões necessárias para a formulação de uma generalização apropriada, ainda que se

[5] Considerando que os alunos não trabalharam com variáveis algébricas anteriormente à resolução da tarefa, a referência a linguagem simbólica no 7.º ano refere-se a linguagem simbólica sem variáveis.

trate de uma propriedade que os alunos conhecem de anos anteriores. Quando é esclarecido o que se pretende com a questão, apresenta dificuldades em generalizar, focando-se sempre em casos particulares e não apresentando uma conjetura válida para qualquer número natural.

Outros alunos, para formularem as suas generalizações, baseiam-se em casos particulares já obtidos em questões anteriores. Tatiana, por exemplo, apresenta para a questão **b** uma resposta muito semelhante à de Cátia, ainda que se foque apenas numa das expressões do enunciado (Figura 5). Contudo, quando lhe é indicado o que se entende por regra, apresenta de imediato a generalização pretendida:

> *Investigadora:* Aqui escreveste para esta expressão específica. Uma regra, quando se fala em regra, é para o geral, para qualquer número. (…) Se fosse agora, para tu me dizeres a regra, como é que a dizias?
>
> *Tatiana:* Multiplicar o número de vezes que o número se repete por esse número. (E2)

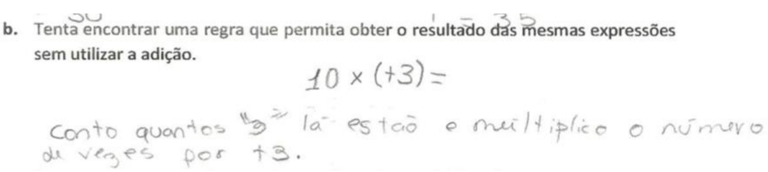


Figura 5 – Resolução de Tatiana da questão **b.**

Bruno, logo na questão **a**, indica explicitamente a transformação da adição sucessiva numa multiplicação, apresentando-a formalmente em linguagem simbólica (Figura 6).

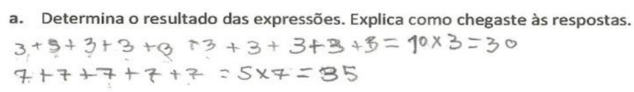


Figura 6 – Resolução de Bruno da questão **a**.

Na questão seguinte, Bruno indica na sua resposta inicial uma regra que pode ser utilizada para qualquer das expressões apresentadas e para outras idênticas, identificando ainda que a regra pedida já foi utilizada na resolução da questão anterior, ainda que não o tivesse evidenciado anteriormente. Apesar da primeira resolução estar um pouco confusa na linguagem natural escrita (Figura 7), oralmente o aluno consegue expressar a regra de modo bastante melhor.

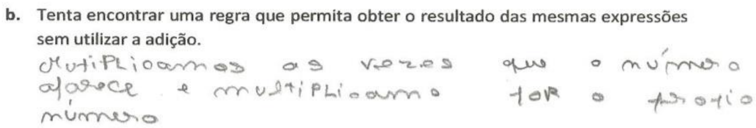

b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.
Mutiplicamos as vezes que o número aparece e multiplicamo por o próprio número

Figura 7 – Resolução de Bruno da questão **b.**

> *Bruno:* Foi aquela que utilizamos no exercício anterior.
> *Investigadora:* Que é como? Explica-me essa regra.
> *Bruno:* Contarmos o número de vezes que o número aparece e é esse número de vezes multiplicado por o número que aparece. (E3)

Na questão **e**, Bruno generaliza facilmente os resultados obtidos em **c** e **d**. Ainda que a sua justificação seja sucinta, é percetível o modo como utiliza casos anteriores para obter uma generalização:

> Era fácil. Fizemos como se não tivesse o menos ali e multiplicámos cinco vezes três que dá quinze. Como nós fizemos ali atrás, que ia dar menos, porque número negativo vezes número positivo vai sempre dar negativo. (*Bruno*) (E3)

Tatiana e Bruno têm facilidade nos tratamentos em linguagem simbólica sem variáveis e nas conversões entre linguagem simbólica sem variáveis e linguagem natural. Na questão **b**, ambos formulam a generalização pretendida aparentemente sem recorrer a casos particulares. Uma vez que já anteriormente tinham utilizado a propriedade em questão para casos particulares, a generalização parece advir de um processo indutivo. Na questão **e**, Bruno apresenta parcialmente a generalização que viria a ser solicitada na questão **f**, em que, a partir de casos particulares, identifica que a multiplicação de dois números inteiros é semelhante à de dois números naturais, à exceção do sinal. Ao formularem as generalizações, ambos alunos evidenciam, nas duas questões, uma compreensão da situação desenvolvida pelas conexões estabelecidas. Na questão **b**, as conexões são estabelecidas entre as expressões apresentadas nesta questão e nas anteriores, o conceito de regra matemática e a propriedade que permite a transformação de uma adição sucessiva numa multiplicação no conjunto dos números naturais. Na questão **e**, as conexões são estabelecidas entre as expressões apresentadas nesta questão e nas anteriores, as noções da multiplicação com números naturais e com números inteiros.

Noutras situações os alunos utilizam propriedades matemáticas para formular generalizações, sem recorrer visivelmente a casos particulares. Assim, na questão **c**, Pedro generaliza para uma situação com números inteiros, a propriedade que permite transformar a adição sucessiva numa multiplicação:

> Aqui menos três está a repetir-se três vezes, aí eu multipliquei menos três vezes três, que é o número de vezes que ele se repete. Aqui a mesma coisa, o menos quatro repete-se cinco vezes, eu multipliquei o menos quatro vezes cinco. (*Pedro*) (E4)

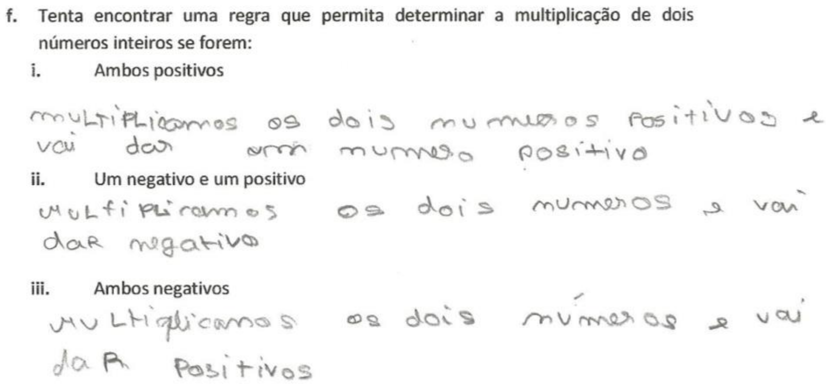
A generalização utilizada na questão **c** é igualmente visível na questão **e**, em que o aluno, ao sentir dificuldades na multiplicação de números inteiros, recorre novamente à adição, apesar de não o apresentar na sua folha de respostas. No entanto, para o caso particular da primeira expressão, consegue concluir facilmente que o resultado da adição sucessiva tem alguma semelhança com a multiplicação de números naturais, embora com um resultado negativo:

> Aí eu tive um pouco mais de dificuldade, mas eu consegui fazer. O menos três estava a repetir-se cinco vezes, eu coloquei menos três, mais menos três e assim sucessivamente até dar vezes cinco, que é quinze. Três vezes cinco é quinze, negativo. (*Pedro*) (E4)

Tatiana, na questão **c**, generaliza para os números inteiros a regra encontrada na questão **b**, a partir de uma propriedade já conhecida para o conjunto dos números naturais:

> Contei o número de vezes que se repete e depois multipliquei pelo número. (*Tatiana*) (E2)

Na questão **f**, a grande maioria dos alunos obtém as regras pretendidas, em particular no que respeita ao sinal do resultado. Bruno, além de indicar o sinal do resultado, refere ainda a "multiplicação de ambos os números" (Figura 8) que tem subjacente a noção de valor absoluto dos números em questão.



f. Tenta encontrar uma regra que permita determinar a multiplicação de dois números inteiros se forem:

i. Ambos positivos

multiplicamos os dois mumeros positivos e vai dar um mumero positivo

ii. Um negativo e um positivo

multiplicamos os dois mumeros e vai dar negativo

iii. Ambos negativos

multiplicamos os dois números e vai dar positivos

Figura 8 – Resolução de Bruno da questão **f.**

Pedro e Tatiana, na questão **c**, utilizam alguns tratamentos na linguagem simbólica durante a sua resolução inicial e realizam com facilidade conversões entre a linguagem simbólica e a linguagem natural oral. Já na sua resposta na questão **f**, Bruno utiliza apenas linguagem natural escrita, não realizando transformações entre representações. Nestas questões, os alunos utilizam generalizações baseadas essencialmente em propriedades matemáticas conhecidas, ainda que muitas vezes não as explicitem. Em particular, na questão **f**, os alunos parecem recorrer a propriedades já conhecidas para o conjunto dos números naturais, ao conceito de valor absoluto de um número, ainda que não o evidenciem, e também a regras práticas que já conhecem da simplificação de expressões numéricas envolvendo adições e subtrações (ao referirem, por exemplo, que "menos com menos vai dar mais" (*Bruno)* E3). Considerando as ausências de justificação para as generalizações obtidas, os processos de significação parecem ser de algum modo incompletos, sugerindo uma compreensão reduzida das generalizações obtidas. Na questão **c**, os alunos generalizam com facilidade a propriedade da multiplicação enquanto adição sucessiva dos números naturais para os números inteiros, estabelecendo conexões entre as propriedades nestes dois conjuntos. Na questão **f**, parecem estabelecer conexões entre as regras práticas já utilizadas e a multiplicação de números inteiros. Um dos alunos (Bruno) estabelece ainda conexões entre a multiplicação de números naturais e a multiplicação de números inteiros utilizando o valor absoluto. Todas estas conexões parecem ser feitas de um modo imediato e pouco consciente, o que leva os alunos a generalizações válidas, mas também a uma compreensão reduzida dessas mesmas generalizações.

9.º ano

No 9.º ano, os processos de generalização utilizados na resolução da tarefa sobre números reais são visíveis essencialmente nas questões **2** e **4**. Na questão **2** é solicitada uma generalização de uma propriedade da multiplicação de raízes quadradas. Na questão **4** é apresentada uma generalização que deve ser identificada pelos alunos como não sendo válida.

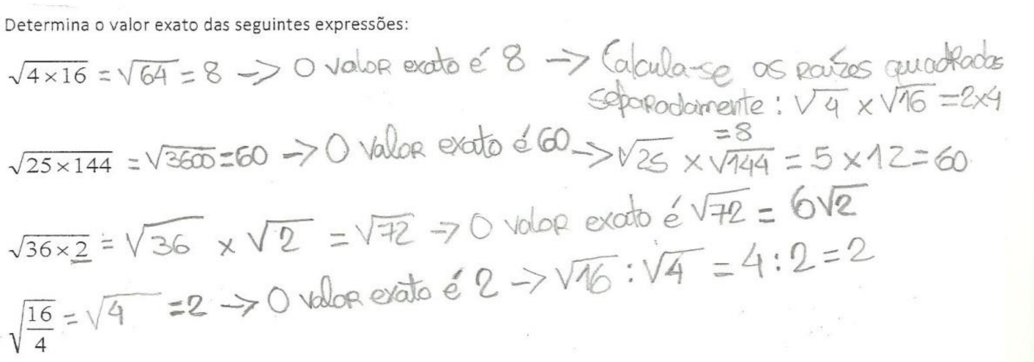
Algumas das generalizações dos alunos são baseadas em casos particulares, nomeadamente casos já utilizados em questões anteriores. Na questão **2**, Iris mostra dificuldade na compreensão do enunciado, referindo primeiramente uma resposta que salienta apenas a informação dada de que a e b são não negativos, sendo conduzida pela investigadora a analisar novamente o enunciado, enfatizando a utilização da questão anterior. Nesta questão, a aluna encontra um processo alternativo para encontrar o resultado:

> *Iris:* Então, a raiz quadrada de quatro… Dois.
> *Iris:* A raiz quadrada de dezasseis, a raiz quadrada de dezasseis, é oito… Não é oito, também não é oito! (…) É quatro.(…) Quatro vezes dois, oito. (A1)

Depois de encontrar uma alternativa para resolver as alíneas da questão **1** em que a aplicação direta de procedimentos de cálculo já não é suficiente, Iris tem facilidade em relacionar a questão **1** com o que é solicitado na questão **2**, ainda que esta última envolva já a linguagem simbólica com variáveis:

> Então, se… Raiz quadrada de *a* vezes raiz quadrada de *b*… É igual à raiz quadrada de *a* vezes *b*. (*Iris*) (A1)

Gustavo, após realizar a questão **1**, tem facilidade em encontrar um processo alternativo para a sua resolução, sem intervenção da professora nem da investigadora (Figura 9). Apesar de estar claramente a responder à questão **1**, utiliza já uma generalização em linguagem natural para o processo utilizado dado que não refere o caso particular das raízes quadradas de quatro e de oito, indicando apenas raízes quadradas em geral. Na questão **2**, o aluno tem facilidade em converter para linguagem simbólica com variáveis a generalização que obteve na questão **1** (Figura 10).



Determina o valor exato das seguintes expressões:

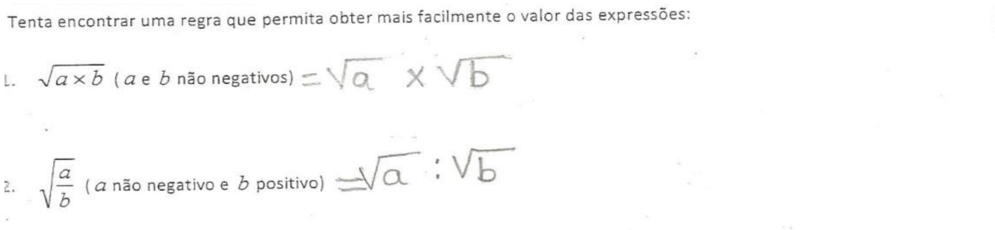
$\sqrt{4\times16} = \sqrt{64} = 8 \to$ O valor exato é 8 $\to$ Calcula-se as raízes quadradas separadamente: $\sqrt{4}\times\sqrt{16} = 2\times4 = 8$

$\sqrt{25\times144} = \sqrt{3600} = 60 \to$ O valor exato é 60 $\to \sqrt{25}\times\sqrt{144} = 5\times12 = 60$

$\sqrt{36\times2} = \sqrt{36}\times\sqrt{2} = \sqrt{72} \to$ O valor exato é $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \to$ O valor exato é 2 $\to \sqrt{16}:\sqrt{4} = 4:2 = 2$

Figura 9 – Resolução de Gustavo da questão **1**



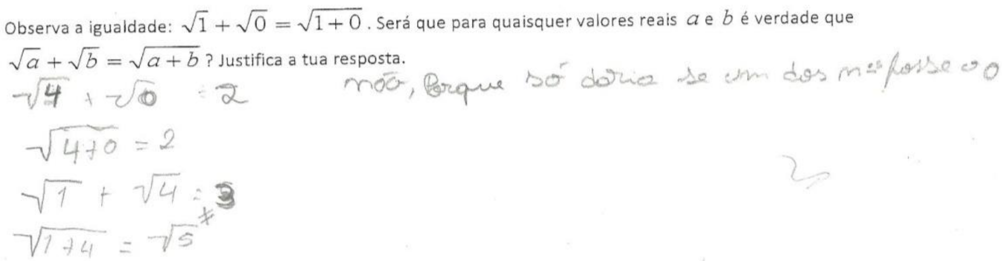
Tenta encontrar uma regra que permita obter mais facilmente o valor das expressões:

1. $\sqrt{a\times b}$ (a e b não negativos) $= \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (a não negativo e b positivo) $= \sqrt{a}:\sqrt{b}$

Figura 10 – Resolução de Gustavo da questão **2**

Na questão **4**, utilizando a igualdade dada e um caso particular adicional, Afonso formula uma generalização sobre quais as situações em que a expressão dada é válida (Figura 11).



Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

$\sqrt{4}+\sqrt{0}=2$

$\sqrt{4+0}=2$

$\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$

$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ $\neq$

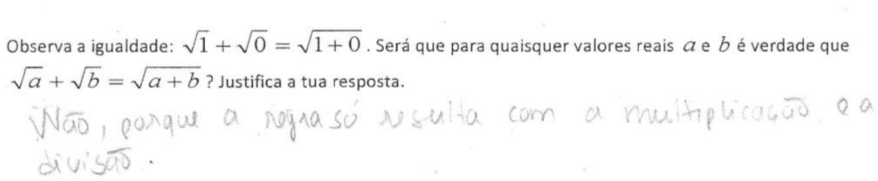
não, porque só daria se um dos nºs fosse 0

Figura 11 – Resolução de Afonso da questão **4**

Na passagem da questão **1** para a **2**, os alunos mostram facilidade na conversão de linguagem simbólica sem variáveis para linguagem simbólica com variáveis. Na questão **1**, Gustavo realiza também com facilidade e por iniciativa própria, a conversão entre linguagem simbólica sem variáveis e linguagem natural escrita. Deste modo, Gustavo parece estar mais à vontade nas conversões entre diversas representações. Na questão **2**, os alunos formulam a generalização pretendida recorrendo aos casos particulares utilizados na questão anterior. Para Gustavo esta generalização é imediata, mas Iris inicialmente tem dificuldades, muito provavelmente por não interpretar o significado de "regra" no contexto da situação. Na questão **4**, Afonso formula uma generalização que não era pedida na questão, mas que advém de casos particulares que utilizou para verificar a validade da generalização pretendida. Os três alunos evidenciam nestas questões uma compreensão da situação através das conexões estabelecidas. Na questão **2** estabelecem conexões entre os casos particulares apresentados na questão anterior e a expressão algébrica apresentada nesta questão e o conceito de regra matemática. A falha nesta última conexão leva a uma dificuldade inicial para Iris, posteriormente superada. Na questão **4**, Afonso estabelece conexões entre a igualdade numérica e a expressão algébrica apresentadas no enunciado, algumas propriedades dos números reais e alguns casos particulares que constrói partindo da expressão algébrica dada no enunciado.

Ainda que a utilização de casos particulares seja o processo mais utilizado para a formulação de conjeturas, em algumas situações os alunos mobilizam propriedades matemáticas já conhecidas. Por exemplo, na questão **4**, Iris responde impulsivamente baseando-se na propriedade da multiplicação de raízes quadradas que obteve na questão **2**, sendo posteriormente guiada a rever a sua resposta:

Iris: (lê o enunciado da pergunta 4) Sim! É sim.
Investigadora: (aguardando algum tempo para que aluna completasse a sua resposta, o que não fez) Experimenta lá.
Iris: É, porque foi o que nós fizemos aqui (referindo-se à questão **2**)
Investigadora: É a mesma coisa? Experimenta.
Iris: Cá para mim é só com vezes. (Escreve o exemplo que experimenta enquanto fala) Raiz de 16 mais raiz de quatro dá 6. Agora, vinte… Pois, não vai dar, era suposto dar raiz de 36. (apaga o exemplo). Então, não porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão (Figura 12). (A1)


Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão.

Figura 12 – Resolução de Iris da questão **4**

Nesta questão, Iris utiliza primeiramente apenas a linguagem natural oral, complementando-a posteriormente com a linguagem simbólica sem variáveis, realizando assim conversões entre estas duas representações. Na utilização conjunta destas representações, a aluna realiza ainda tratamentos em cada uma das linguagens. Apesar de, numa primeira fase, a aluna validar erradamente a generalização, utiliza propriedades matemáticas conhecidas da questão **2** para o fazer. Com alguma intervenção, a aluna consegue detetar o seu erro, recupera a mesma propriedade e utiliza o caso particular que selecionou para formular outra generalização em que inclui implicitamente propriedades das quatro operações no conjunto dos números reais. Nesta questão, a aluna, ao formular uma generalização para uma propriedade da raiz quadrada nas várias operações, estabelece conexões entre o caso particular que utiliza, as propriedades obtidas nas questões anteriores e a subtração enquanto caso particular da adição. Deste modo, demonstra uma boa compreensão da situação que deriva dos processos de significação que utiliza.

Justificação

7.º ano

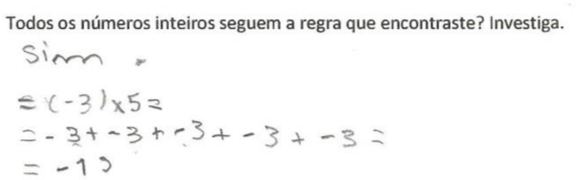
Nas justificações que apresentam para as suas resoluções, os alunos baseiam-se por vezes na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos, o que compromete a validade das suas justificações. Por exemplo, na alínea **f**, Bruno, apesar de ter facilidade em encontrar o sinal para o resultado da multiplicação, utiliza conceitos para justificar a sua resposta que não se adequam à situação ou invoca relações matemáticas demasiado vagas:

> *Bruno:* Em ambos os números negativos, multiplicamos os dois números e vai dar positivo.
> *Investigadora:* Ok, quando são os dois negativos vai dar positivo, porquê?
> *Bruno:* Porque menos com menos vai dar mais.
> (…)
> *Investigadora:* Porque é que tu achaste que podias utilizar essas regras (referindo-se às regras de sinais utilizadas anteriormente na simetria de números inteiros) para a multiplicação?
> *Bruno:* Porque a multiplicação é como se tivesse a somar o número de vezes o número. Esta aqui, cinco vezes três, é a mesma coisa que estarmos a somar menos três, mais menos três, mais menos três...
> (…)
> *Investigadora:* Podíamos usar umas regras que não eram daqui, também para aqui? Achas-te natural isso funcionar para aqui também?
> *Bruno:* Eu achei natural.
> *Investigadora:* Porquê?
> *Bruno:* A Matemática também está toda ligada! (E3)

Na última pergunta colocada na questão **f**, Pedro justifica que a generalização pode ser validada a partir de um grande número de casos particulares:

> Porque é a regra geral. Podemos ficar a vida toda fazendo isso, qualquer número ia dar essa regra. (*Pedro*) (E4)

Bruno, também nesta última pergunta da questão **f**, apresenta apenas um exemplo para um caso particular respeitante à segunda alínea (Figura 13).


Todos os números inteiros seguem a regra que encontraste? Investiga.

Sim

= (-3) x 5 =

= -3 + -3 + -3 + -3 + -3 =

= -15

Figura 13 – Resolução de Bruno da última pergunta da questão **f**

Além de limitar a sua investigação a um caso particular, o aluno assume a generalização como verdadeira sem sentir efetivamente necessidade de a justificar:

> *Investigadora:* Então e ali em vez de estar um três e um cinco estivesse outro número?
> *Bruno:* Era igual.
> *Investigadora:* Qualquer número? Funcionava para qualquer número?
> *Bruno:* Sim.
> *Investigadora:* Porquê?
> (…)
> *Bruno:* Oh, porque tinha que dar, é assim, se os outros dão...estes também tinham que dar... (E3)

Com exceção de Bruno, que utiliza na sua resposta à última pergunta da questão **f** um exemplo em linguagem simbólica, os alunos utilizam apenas a linguagem natural oral ou escrita para as suas justificações. Nestas justificações às questões apresentadas, os alunos utilizam ou o senso comum ou exemplos ou simplesmente a sua perceção da situação. Estas justificações remetem para uma incompreensão parcial da situação, em que os alunos, apesar de terem uma ideia correta, não estabelecem as conexões necessárias para a justificar de um modo matematicamente válido.

Ideias já compreendidas anteriormente, quando apresentadas de forma clara, podem também constituir justificações válidas. Nas justificações para as suas respostas às primeiras duas alíneas da questão **f**, Pedro refere:

Pedro: A primeira foi fácil, porque já tínhamos feito já há muito tempo. Ambos positivos. Eu coloquei um exemplo, quatro vezes quatro, dezasseis. Portanto, se multiplicarmos um positivo com um positivo ia dar positivo.
Investigadora: E um negativo com um positivo?
Pedro: Negativo. Fiz um exemplo, mas aí eu também pensei na soma. Um negativo com um positivo ia dar negativo, portanto, menos três mais menos três ia dar menos seis. (E4)

Na sua resolução na folha de respostas, Pedro utiliza a linguagem natural escrita para apresentar as suas generalizações e a linguagem simbólica sem variáveis para apresentar um exemplo em cada alínea. Assim, ao apresentar a sua justificação para as respostas dadas, Pedro realiza conversões entre a linguagem simbólica sem variáveis e a linguagem natural oral. Nestas primeiras alíneas da questão **f**, Pedro utiliza para as suas justificações conhecimentos anteriores, propriedades matemáticas utilizadas nas questões anteriores e apresenta também um exemplo em cada alínea, testando assim a sua conjetura, ainda que para um caso particular. Neste sentido, Pedro desenvolve uma compreensão clara da situação em questão ao ser capaz de articular propriedades de vários conjuntos numéricos, as generalizações pretendidas e os casos particulares que seleciona.

Outra situação que pode promover o desenvolvimento de justificações válidas é a utilização de argumentos válidos, como conceitos ou propriedades conhecidas. Na questão **a**, Tatiana apresenta uma estratégia em que recorre à propriedade associativa da adição, ainda que a represente informalmente (Figura 14).

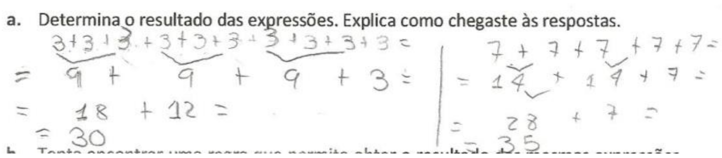


Figura 14 – Resolução de Tatiana da questão **a.**

Na mesma questão, Pedro usa uma outra estratégia e explica do seguinte modo o processo que utilizou:

> Eu usei a multiplicação, como repetiu-se muitas vezes, eu fiz a maneira mais rápida. Aqui, o três repetiu-se dez vezes, fiz três vezes dez, deu trinta. O sete repetiu-se cinco vezes, é trinta e cinco. (*Pedro*) (E4)

Nas questões **c**, **d** e **e**, todos os alunos começam por recorrer à adição sucessiva para encontrarem o resultado das expressões (Figuras 15 e 16).

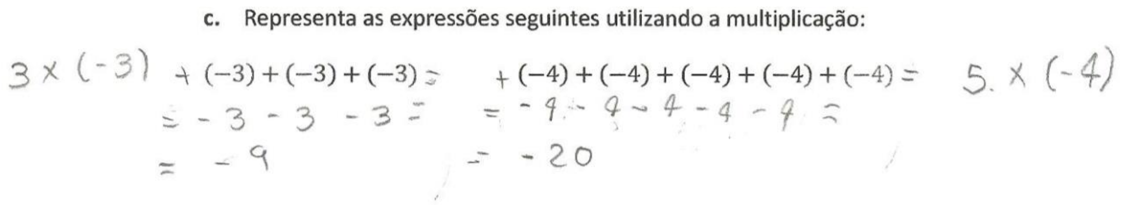


Figura 15 - Resolução de Tatiana das questões **c** e **d.**

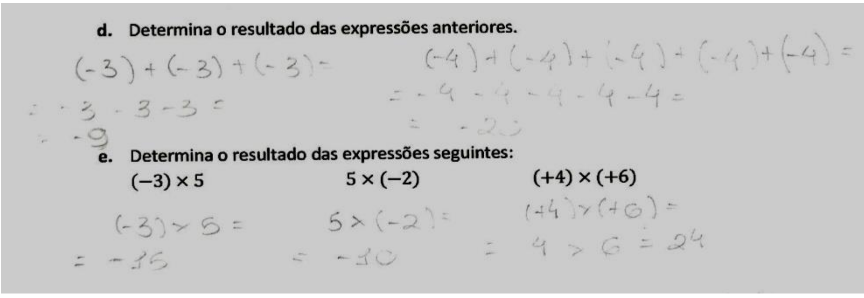


Figura 16 – Resolução de Pedro das questões **d** e **e.**

Nestas questões, os alunos justificam as suas resoluções explicitando a estratégia utilizada. Por exemplo, Pedro refere a ter adicionado as parcelas duas a duas e Bruno, apensar de utilizar também a adição sucessiva, usa ainda exemplos concretos para os números negativos:

> Aqui, como era a primeira conta de multiplicação negativa que eu tinha feito, eu usei a soma e eu fiz dois a dois e aqui no final eu já coloquei logo o resultado. *(Pedro)* (E4)
>
> Estávamos no piso menos quatro e tínhamos que descer mais oito vezes, não, dezasseis vezes. (*Bruno)* (E3)

Na última alínea da questão **f**, Pedro utiliza uma justificação apropriada para a sua resposta, baseando-se em propriedades conhecidas, ainda que ao expressar-se o faça de um modo algebricamente pouco formal:

> *Investigadora:* E se fossem os dois negativos?
> *Pedro:* Eu pensei na soma também, como são os dois negativos, o quatro vai repetir-se seis vezes, como é menos seis, seria o simétrico de seis, aí eu somei. Com o simétrico de menos quatro é quatro, eu somei quatro mais quatro mais quatro...que deu vinte e quatro.

(…)
Investigadora: Ok. Como é que lembraste do simétrico?
Pedro: Como é menos seis e o menos é o símbolo da simetria, eu pensei mais foi nisso. (E4)

O aluno revela nesta questão um processo de raciocínio que se pode traduzir nos seguintes passos (Figura 17):

$$
\begin{aligned}
(-4)\times(-6) &= (-4)\times[-(+6)]\\
&= -(-4)\times 6\\
&= -[(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)]\\
&= -(-24)\\
&= 24
\end{aligned}
$$

Figura 17 – Processo utilizado por Pedro na última alínea da questão **f**

Nas suas resoluções das questões **a**, **b**, **c**, **d** e **e** os alunos utilizam tratamentos na representação em linguagem simbólica. Na questão **f**, Pedro utiliza a linguagem natural escrita para representar a generalização pretendida e a linguagem simbólica sem variáveis para representar o seu exemplo. Quando lhes é pedido para justificarem as suas respostas, os alunos fazem-no utilizando a linguagem natural oral, mostrando facilidade nas conversões entre a linguagem utilizada nas resoluções e a linguagem natural oral. Os alunos apresentam nas primeiras questões justificações apropriadas e completas, aplicando procedimentos de cálculo simples e utilizando tendencialmente a linguagem simbólica para justificar as suas respostas durante a resolução da tarefa. Para estas justificações os alunos utilizam propriedades conhecidas, como a propriedade associativa da adição ou a propriedade da multiplicação como uma adição sucessiva e utilizam também factos conhecidos, como resultados da multiplicação. Ainda que os processos de significação nestas questões representem maioritariamente conexões entre os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros, os alunos desenvolvem esses processos proficuamente. Na última justificação de Pedro, o aluno recorre a propriedades e conceitos que já conhecia sobre o simétrico de um número inteiro, o que é de sublinhar visto tratar-se de um aluno no início do 3.º ciclo. Considerando que o aluno não conhece a linguagem simbólica com variáveis, o facto de utilizar apenas um exemplo para a sua justificação é aqui pouco relevante, salientando-se as relações que o aluno estabelece com os conceitos já conhecidos e uma situação nova para a qual não existia *a priori* nenhum caso particular a partir do qual o aluno pudesse induzir a sua generalização.

9.º ano

No 9.º ano, parte das justificações apresentadas pelos alunos são válidas por se basearem em ideias já compreendidas anteriormente. Na questão **3**, Iris e Afonso, justificam a sua resposta de acordo com os resultados obtidos para a questão **2**, dado que nesta questão já haviam justificado as afirmações referentes às propriedades de *a* e de *b*. Afonso responde de imediato que com os números negativos a regra não é válida (Figura 18).

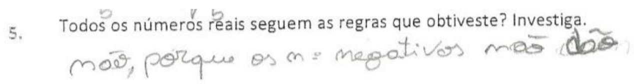


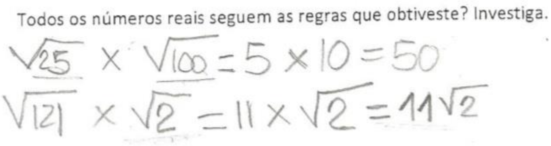
Figura 18 – Resolução de Afonso da questão **3**

Iris, apesar de numa primeira fase responder impulsivamente à pergunta, justifica a sua resposta com o conceito utilizado na questão anterior:

Iris: (lê o enunciado da pergunta 3) Sim.
Investigadora: Porque…
Iris: Não, porque os reais podem ser negativos. Então é não, nem é sim.
Investigadora: Então e se os números reais forem negativos, porque é que a regra não funciona?
Iris: Porque não existe a raiz quadrada de números negativos. (A1)

Nesta questão, os alunos utilizam para a sua resposta apenas a linguagem natural (escrita ou oral). Não sentem necessidade de alargar a sua justificação visto já terem utilizado a mesma ideia numa questão anterior, desenvolvendo assim uma justificação válida e suficiente. Nesta justificação, ao estabelecerem a relação entre a questão **3** e a questão anterior, os alunos criam um contexto de complexidade reduzida, promovendo uma rápida compreensão da situação.

A justificação, quando se refere a uma generalização não válida como a proposta na questão **3**, pode também basear-se num contraexemplo. Contudo, encontrar esse contraexemplo pode passar pelo teste de vários casos particulares com características distintas. Gustavo, considerando que não lhe foi pedido anteriormente para justificar as afirmações referentes às propriedades de *a* e de *b* na questão **2** e que não sentiu necessidade de considerar tais afirmações na resolução da questão, utiliza alguns casos particulares para a questão **3** (Figura 19).


Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

$\sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50$

$\sqrt{121} \times \sqrt{2} = 11 \times \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

Figura 19 – Resolução do Gustavo da questão **3**

A seleção destes casos não é aleatória, o que revela uma tentativa por parte do aluno de incluir uma variedade de casos que permita a validação da generalização sugerida:

> Esse fiz um quadrado de quadrados perfeitos, 100, 25, cinco vezes cinco, dez vezes dez, e fiz um com um quadrado perfeito e um sem ser (*Gustavo*) (A1)

Contudo, dado que o aluno considera estes casos suficientes, é-lhe sugerido que inclua números negativos na sua seleção. Gustavo tem dificuldade em utilizar o conceito de raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais:

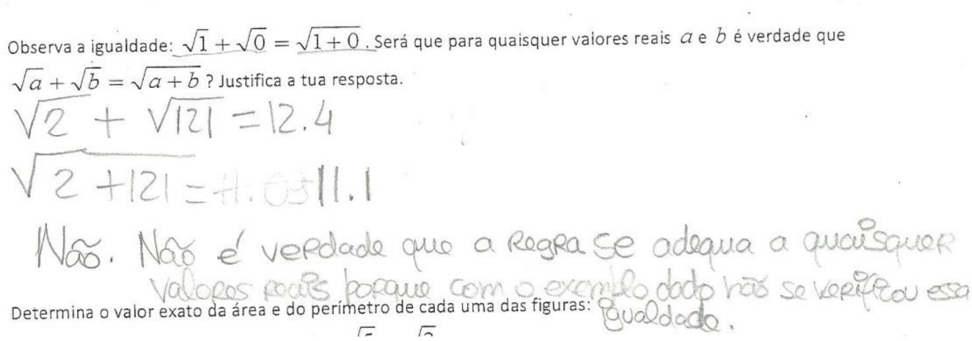
> *Gustavo:* Com um negativo acho que ia acontecer o mesmo. (experimenta na calculadora raiz de -25)
> *Investigadora:* Existe raiz quadrada de um número negativo?
> *Gustavo:* Pois... Não.
> (…)
> *Investigadora:* Então isto é valido para todos os reais? Esta regra?
> *Gustavo:* Não, é só para os reais positivos. (A1)

Na questão **3**, para os alunos que exploraram as propriedades de *a* e de *b* na questão anterior, como Iris e Afonso, a resolução foi imediata e foi suficiente a utilização da linguagem natural. Gustavo, visto que não explorou as propriedades de *a* e de *b* na questão anterior, utiliza casos particulares expressos em linguagem simbólica sem variáveis, ainda que não apresente todos os tratamentos que seriam necessários para testar a regra para esses casos. É interessante verificar que Gustavo não seleciona aleatoriamente os casos que integra na sua solução, mostrando uma preocupação em abranger diversas propriedades dos números em questão. Contudo, nesta seleção, necessita de alguma intervenção para abranger mais alguns casos particulares que seriam essenciais para a validação ou não validação da generalização em questão. Assim, a justificação inicial de Gustavo é incompleta e não válida por se basear apenas em casos particulares, mas destaca-se a inclusão de vários fatores na sua tentativa de justificação. A sua justificação final é já baseada num contraexemplo. Nesta questão, Gustavo estabelece conexões entre propriedades dos números reais e a influência que tais propriedades podem ter na resolução de operações com raízes, contudo não articula estes conceitos com o enunciado da questão e com todas as características que deveriam ser salientadas, o que o leva a obter uma justificação inicial bastante incompleta. Em situações semelhantes à anterior, os alunos, mesmo conseguindo encontrar um contraexemplo que valida a justificação, têm dificuldade em considerar esse contraexemplo.

Na questão **4**, Gustavo, ainda que numa primeira fase não consiga resolver a questão por não considerar o que era solicitado, utiliza um caso particular para verificar a generalização pretendida, concluindo a partir deste caso que a generalização não é verdadeira. Contudo, tem dificuldade em apresentar uma justificação para a sua conjetura, não assumindo o contraexemplo obtido como suficiente:

> *Gustavo:* E agora explicar porquê...
> *Investigadora:* Então, como é que tu sabes que não é verdade? Convence-me lá que não é verdade.
> *Gustavo:* (rindo) A calculadora convence-a.
> *Investigadora:* Não experimentaste? Aquilo que tu tens chama-se contraexemplo, ou seja, tens um exemplo onde ela não é verdade, se não é verdade para este exemplo em particular, aqui pergunta para qualquer valor real, então também não é verdade para qualquer valor real, pode ser para alguns, como é o caso do zero e do um onde por acaso é verdade, mas não é para qualquer. Portanto, eu não posso escolher dois valores reais quaisquer e dizer que esta regra é verdadeira, porque não é verdade.
> *Gustavo:* É só isso?
> *Investigadora:* É só isso, é só explicares isso. (A1)

Após esta intervenção da investigadora, Gustavo justifica com o contraexemplo dado a sua resposta (Figura 20).



Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

$\sqrt{2}+\sqrt{121}=12.4$

$\sqrt{2+121}=11.1$

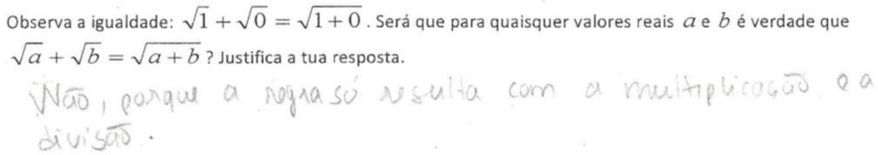
Não. Não é verdade que a regra se adequa a quaisquer valores reais porque com o exemplo dado não se verificou essa igualdade.

Determina o valor exato da área e do perímetro de cada uma das figuras:

Figura 20 – Resolução de Gustavo da questão **4**

Iris, nesta questão e também numa segunda fase da sua resolução, utiliza um caso particular para verificar a generalização pretendida. Contudo, considerando que o caso particular que experimenta poderia ser utilizado como contraexemplo para justificar a sua resposta final, a aluna não o utiliza (Figura 21).

> (Escrevendo o exemplo que experimenta enquanto fala) Raiz de 16 mais raiz de quatro dá 6. Agora, vinte… Pois, não vai dar, era suposto dar raiz de 36. (Apaga o exemplo). Então, não porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão. (*Iris*) (A1)



Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão.

Figura 21 – Resolução de Iris da questão **4**

Afonso, tal como os colegas, não assume a necessidade de utilizar o contraexemplo para justificar a sua resposta, ainda que, ao contrário de Gustavo, consiga identificar um caso particular como suficiente para refutar uma afirmação na discussão com uma colega:

> *Investigadora:* Então, essa regra é verdade?
> *Afonso e Débora:* Não.
> *Débora:* Aqui é (referindo-se à igualdade do enunciado), mas aqui não (referindo-se ao segundo caso particular que Afonso utilizou).
> *Afonso:* Não, aqui é um exemplo. (A1)

No que respeita às representações utilizadas, os alunos utilizam maioritariamente a linguagem simbólica sem variáveis para testar a regra apresentada, ainda que utilizem a linguagem natural escrita para expressarem as suas respostas finais. Gustavo mostra algumas dificuldades na conversão da linguagem simbólica com variáveis para a linguagem simbólica sem variáveis na primeira fase da sua resolução, ainda que em questões anteriores tenha mostrado facilidade na conversão inversa. Nesta questão os alunos encontram com alguma facilidade um contraexemplo para a generalização pedida. Contudo, apesar de desenvolverem alguma compreensão da situação, os alunos nunca utilizam por iniciativa própria o contraexemplo como justificação das suas conjeturas, ou por não o assumirem como justificação suficiente ou por o considerarem desnecessário à justificação. A validade das justificações pode ainda ser baseada em argumentos válidos resultantes da utilização de conceitos ou propriedades conhecidas.

Na questão **2**, após a resposta dada pelos alunos, é solicitado a Iris e a Afonso que justifiquem o porquê da afirmação "a e b não negativos", que os alunos não sentem à partida necessidade de justificar. Iris tem inicialmente alguma dificuldade em articular esta justificação, aparentemente não por desconhecimento dos conceitos necessários, mas por formular uma primeira justificação que se resume matematicamente a uma redundância.

> *Iris:* Ah, pois, também temos de explicar isso!
> (…)
> *Iris:* E eu tinha explicado aqui… Não podem ser negativos porque são positivos.
> *Investigadora:* Mas a minha pergunta é, porque é que têm de ser não negativos?
> *Iris:* Porque podem ser zero.
> *Investigadora:* Também podem ser zero… E se eles fossem negativos o que é que ia acontecer?
> (Iris experimenta $\sqrt{-16}$ na calculadora)
> *Investigadora:* Há raízes de números negativos?
> *Iris:* Não…Então está-nos a enganar!
> *Investigadora:* Não vos estou a enganar, só quero é perceber porque é que não podem ser negativos.
> *Iris:* Não podem ser negativos porque têm a raiz quadrada! Espere aí… (escreve) "não existe a raiz quadrada de números negativos" (A1)

Iris mostra igualmente alguma inconsistência no conceito de raiz quadrada no conjunto dos números reais, não tendo presente que não poderá concretizar a raiz quadrada de um número negativo. Também Afonso parece ter uma dificuldade semelhante, sendo uma colega que a salientar que não é possível, no conjunto dos números reais, obter a raiz de um número negativo:

Investigadora: E agora explica-me só porque é que eles salientam que o a e o b são não negativos.
Afonso: Porque também pode ser o zero.
Investigadora: Também pode ser o zero, e podem ser os negativos?
Afonso: Não.
Investigadora: Porque é que não podem ser os negativos?
Afonso: Porque é a raiz quadrada.
Investigadora: E...
(Afonso mantém-se em silêncio)
Investigadora: Quanto é que é a raiz quadrada de um número negativo?
Afonso: Raiz quadrada de um número negativo...
Débora: Então, não dá para fazer! (A1)

Contudo, quando é solicitado a Iris e a Afonso que justifiquem o porquê de o *b* não poder ser zero, os alunos mobilizam conhecimentos anteriores com facilidade e articulá-los com a situação:

Iris: Porque o *a* pode ser zero e o *b* não pode ser zero.
Investigadora: Porque é que o *b* não pode ser zero?
Iris: Porque é positivo. É positivo porque não é zero, porque está aqui em baixo.

Investigadora: E agora diz-me lá porque é que o *a* é não negativo e o *b* é positivo.
Afonso: Porque não se pode dividir um número por zero. (A1)

Salienta-se nestas justificações a articulação de Iris entre a linguagem oral e a linguagem escrita (Figura 22). Na linguagem oral a aluna refere "está aqui em baixo" e na linguagem escrita refere "é o denominador".

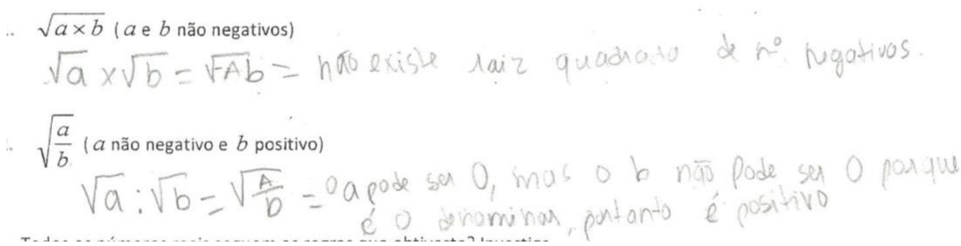


Figura 22 – Resolução de Iris da questão **2**

Para as justificações que são solicitadas a Iris e Afonso, os alunos utilizam apenas a linguagem natural para as exprimirem. Em particular, salienta-se que Iris, na segunda justificação, mostra uma maior formalidade na linguagem natural escrita que na linguagem natural oral, ao referir oralmente "porque está aqui em baixo" e escrever "porque é o denominador". Nas primeiras justificações, as dificuldades em estabelecer conexões entre as propriedades dos números dados e a raiz quadrada de um número, leva os alunos a não conseguir justificar a afirmação. Contudo, quando é esclarecida tal conexão, os alunos utilizam esse argumento para validar a sua justificação. Nas segundas justificações, os alunos não encontram dificuldades em estabelecer conexões entre as propriedades dos números e dos denominadores, utilizando assim argumentos válidos para a justificação da afirmação.

Conclusão

As tarefas apresentadas aos alunos, tendo por objetivo a exploração de propriedades dos números inteiros e dos números reais, permitem aos alunos do 7.º ano investigar diferenças e semelhanças entre propriedades da multiplicação de números naturais e inteiros e no 9.º ano, diferenças entre as propriedades de várias expressões envolvendo as quatro operações e a raiz quadrada no conjunto dos números reais.

Na formulação de generalizações sobre estas propriedades, tanto no 7.º como no 9.º ano, grande parte dos alunos segue uma abordagem indutiva, generalizando as relações observadas em casos particulares para uma classe de objetos mais ampla. Contudo, no 7.º ano, os processos de significação envolvidos nas generalizações realizadas pelos alunos indiciam também conexões com propriedades e/ou conceitos conhecidos, não podendo ser resumidas a uma relação direta entre os casos particulares e um caso geral e sugerindo, portanto o uso de raciocínio abdutivo. Apenas uma aluna evidencia uma grande dificuldade em articular em linguagem verbal uma generalização que mostra compreender usando casos particulares.

Já nos alunos do 9.º ano a utilização da Álgebra, através da linguagem simbólica com variáveis, torna as conexões com propriedades e conceitos menos visíveis, sendo a generalização mais imediata que no 7.º ano. Além das situações em que os alunos utilizam uma abordagem empírica para a formulação de generalizações, surgem também, ainda que com menor frequência, generalizações de cunho mais dedutivo, baseadas em propriedades matemáticas suas conhecidas. Tais generalizações, ao basearem-se mais em propriedades do que em casos particulares, revelam uma maior capacidade de raciocínio dos alunos visto que estabelecem conexões de maior complexidade.

Contudo, os alunos não justificam a utilização dessas propriedades na maioria das situações, o que sugere existirem ainda lacunas na sua compreensão. Deste modo, tanto nos alunos do 7.º como do 9.º ano, é possível distinguir entre situações em que a generalização é formulada com base em casos particulares e com base em propriedades conhecidas, à semelhança da distinção apresentada por Galbraith (1995) entre abordagens empíricas e dedutivas.

Tal como sugerem Lannin, Ellis e Elliot (2011), as tarefas apresentadas, sendo de cunho exploratório, revelam potencialidades para que os alunos justifiquem as suas conjeturas, nomeadamente as suas generalizações. Contudo, os alunos nem sempre sentem necessidade de justificar as suas respostas ainda que, nalguns casos, quando lhes é solicitado, consigam identificar as propriedades e conceitos necessários para a justificação. Deste modo, as justificações que apresentam decorrem maioritariamente do questionamento da professora ou da investigadora, não surgindo espontaneamente durante a realização das tarefas, tal como se tem verificado em numerosos trabalhos anteriores (Ponte, 2007). No 7.º ano, alguns alunos parecem não dar relevância às características necessárias a uma justificação para que esta seja válida, apresentando justificações que se baseiam em casos particulares ou na sua perceção da situação. Alguns alunos apresentam justificações válidas para as questões apresentadas, ou por se basearem em conceitos ou propriedades compreendidos anteriormente ou por utilizarem argumentos válidos para a situação em questão, destacando-se a justificação de Pedro para a questão **f**, em que mobiliza conhecimentos anteriores e justifica a sua resposta com base em propriedades e conceitos matemáticos válidos na situação. Verifica-se portanto que, mesmo no início do 3.º ciclo, é possível aos alunos elaborar eficazmente justificações com algum grau de complexidade.

No 9.º ano, os alunos parecem ter alguns cuidados na justificação das suas respostas, nomeadamente quanto à seleção não aleatória de casos a testar para obter generalizações e quanto à não utilização isolada de casos particulares ou perceções da situação. Tal como os alunos de 7.º ano, também os do 9.º apresentam justificações baseadas em conhecimentos anteriores e baseadas em argumentos válidos. As justificações que se destacam no 9.º ano dizem respeito à utilização de contraexemplos para refutar uma afirmação. Nestas situações, os alunos conseguem com alguma facilidade obter os contraexemplos necessários, mas nem sempre os consideram necessários ou suficientes para a comprovar a refutação de uma conjetura. Contudo, ao contrário da dificuldade dos alunos identificada por Galbraith (1995), os contraexemplos utilizados pelos alunos nesta tarefa satisfazem as condições dadas e violam as conclusões pretendidas. De acordo com os resultados apresentados, é possível distinguir entre situações em que os alunos não apresentam justificações válidas por se basearem na autoridade, em perceções ou em casos particulares e situações em que as justificações apresentadas são válidas por utilizarem (i) conhecimentos anteriores, (ii) propriedades ou conceitos matemáticos, ou (iii) contraexemplos que refutem a afirmação.

Nestas tarefas, os alunos não apresentam dificuldades significativas nas transformações entre representações, sejam tratamentos ou conversões. Assim, a utilização de diferentes representações não parece limitar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Já os processos de significação surgem intrinsecamente ligados às generalizações ou justificações apresentadas na medida em que, quando há dificuldades na generalização ou justificação, parece igualmente existir uma dificuldade nas conexões entre os conceitos e propriedades necessários à consecução da tarefa.

O presente artigo apresenta um quadro original para o estudo do raciocínio matemático dos alunos, destacando a importância da generalização e da justificação nos raciocínios indutivo, abdutivo e dedutivo e mostra a sua utilidade no estudo dos processos de raciocínio. Com base neste quadro mostra como alguns alunos são capazes de realizar certas generalizações e justificações. Em particular, mostra a capacidade de por vezes usarem contraexemplos de modo mais sofisticado que o apontado pela literatura. Além disso, resultados deste estudo sugerem que os objetivos de aprendizagem relativos ao raciocínio matemático enunciados no programa (ME, 2007) são pertinentes pois as tarefas apresentadas promoveram situações que contribuíram para que os alunos atinjam os objetivos curriculares propostos. Contudo, para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, o professor tem de selecionar criteriosamente as tarefas a apresentar na sala de aula tendo em conta os processos de raciocínio que podem estar envolvidos. Além disso, para desenvolver um questionamento eficaz é necessário que tenha presente não só a importância de generalizar e justificar, mas também o que tipo de justificação se deve esperar que os alunos apresentem em cada tarefa de acordo com o respetivo nível de ensino. Concretizar estas sugestões em propostas de tarefas e investigar modos de exploração na sala de aula constitui um importante desafio para a educação matemática.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A strutural approach. *Synthese, 134*, 25-44.

Azevedo, A. B. G. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário* (Dissertação de mestrado, Lisboa, Universidade de Lisboa).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Merlín I.D.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 103-131.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematicallearning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-201). Routledge: Taylor and Francis.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: A survey. In M. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Actas do IX EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 75-104). Fundão: SPCE-SEM.

Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). (disponível em http://repositorio.ul.pt/)

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, NJ: Sage.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning on task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 165-190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 29-55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255-276.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano. Atas *do EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 347-364), Póvoa do Varzim.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*(5-6), 419-430.

Riviera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, *15*(4), 213-221.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Anexo 2

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018a). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema* (aceite para publicação a 17/05/2018).

<u>Versão dos autores</u>

Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: Uma Investigação Baseada em Design

Promoting Students' Mathematical Reasoning: A Design-Based Research

Joana Mata-Pereira

João Pedro da Ponte

Resumo

O modo de promover o raciocínio matemático dos alunos é uma questão importante mas pouco investigada. Este artigo apresenta o primeiro ciclo de intervenção de uma investigação baseada em design (IBD) sobre a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Tem por objetivo compreender de que modo um conjunto de princípios de design referentes às tarefas a propor e às ações do professor na sala de aula pode contribuir para promover o raciocínio matemático dos alunos. A análise de dados tem por base estes princípios de design e centra-se essencialmente nos processos de raciocínio dos alunos de generalizar e justificar e nas ações do professor de convidar, guiar, sugerir e desafiar. Os resultados sugerem que os princípios de design contribuem para que os processos de raciocínio dos alunos se evidenciem nos momentos de discussão coletiva de tarefas de natureza exploratória.

Palavras-chave: Raciocínio matemático. Ações do professor. Generalização. Justificação. Investigação Baseada em Design.

Abstract

How to enhance students' mathematical reasoning is an important but little researched issue. This article presents the first intervention cycle of a design-based research about enhancing students' mathematical reasoning. It aims to understand how a set of design principles concerning the tasks to propose and the teacher's actions in the classroom may contribute to enhance students' mathematical reasoning. Data analysis is based on those design principles and focus on students' reasoning processes of generalizing and justifying and on teacher's actions of inviting, guiding, suggesting and challenging. The results suggest that the design principles contribute for reasoning processes to emerge on moments of whole class discussions of exploratory tasks.

Keywords: Mathematical reasoning. Teacher's actions. Generalization. Justification. Design-Based

Research.

1 Introdução

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é, sem dúvida, um dos grandes objetivos da matemática escolar. Contudo, é reduzida a informação e investigação sobre os modos como o professor pode contribuir para desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos (BRODIE, 2010). Para que o professor possa promover o raciocínio matemático na sala de aula, é antes de mais necessário um conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e os processos de raciocínio dos alunos. No entanto, este conhecimento, ainda que fundamental, é insuficiente para o professor. Por um lado, é necessário saber quais as tarefas apropriadas ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por outro lado, é imprescindível considerar a própria prática profissional do professor, nomeadamente saber quais as ações de ensino que melhor apoiam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Atendendo à escassa investigação nesta área, o estudo que aqui apresentamos pretende contribuir para a construção de princípios orientadores para a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Seguindo a modalidade de investigação baseada em design (COBB et al., 2003), é estruturada uma intervenção que visa promover o raciocínio matemático dos alunos através da proposta de tarefas e de ações do professor focadas no raciocínio matemático. Assim, este artigo tem por objetivo compreender de que modo os princípios de design promovem o raciocínio matemático dos alunos. Para tal, descrevemos e analisamos o primeiro ciclo de intervenção numa unidade de ensino sobre sequências no 8.º ano de escolaridade.

2 Raciocínio matemático

Um dos pontos fundamentais para promover o raciocínio matemático dos alunos é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e quais os processos de raciocínio a desenvolver nos alunos. Assumimos que raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas (e.g. ALISEDA, 2003; BROUSSEAU & GIBEL, 2005; OLIVEIRA, 2008; PÓLYA, 1954; RIVERA & BECKER, 2009), ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões. Pela sua abrangência, esta definição de raciocínio acomoda diversas perspetivas sobre o raciocínio matemático, nomeadamente inferências dedutivas, indutivas e abdutivas. As inferências dedutivas são caracterizadas por dois aspetos centrais: (i) a certeza, que diz respeito à relação necessária entre as premissas e a conclusão e (ii) a irrefutabilidade das conclusões, que determina que não existem dúvidas quanto à validade das conclusões (ALISEDA, 2003). As inferências indutivas surgem frequentemente associadas a processos como a generalização, onde se identifica uma propriedade, conceito ou ideia de uma classe alargada de objetos matemáticos (PÓLYA, 1954; RUSSEL 1999). As inferências abdutivas consistem em hipóteses razoáveis sobre um determinado fenómeno (RIVERA & BECKER, 2009). Estas hipóteses partem de relações entre diversos fenómenos que se cruzam numa determinada situação, sendo utilizadas para explicar algo intrigante (ALISEDA, 2003). Nas perspetivas indutiva e abdutiva, as inferências advêm de perceções que emergem de explorar conceitos e ideias matemáticas a níveis práticos e intuitivos (GALBRAIT, 1995). Assim, raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico ou demonstrativo, incluindo também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões.

O raciocínio matemático envolve uma variedade de processos de raciocínio que incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a justificação (LANNIN, ELLIS & ELLIOT, 2011). Destes processos, destaca-se a formulação de generalizações (enquanto conjeturas com características próprias) e a justificação como processos de raciocínio fundamentais. Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas, sendo a generalização o processo de raciocínio envolvido. Por outro lado, a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações. A formulação de generalizações relaciona-se sobretudo com os raciocínios indutivo e abdutivo, enquanto a justificação se relaciona essencialmente com o raciocínio dedutivo.

3 Tarefas

No ensino da Matemática e particularmente para o desenvolvimento do raciocínio matemático, as tarefas a propor constituem um dos aspetos centrais para o sucesso dos alunos. São especialmente relevantes os tipos de tarefa em que os alunos se envolvem, os modos como se envolvem e as interações que podem surgir em torno dessas tarefas (BRODIE, 2010).

Vários estudos identificam a resolução de problemas e as tarefas de exploração e investigação como potenciadoras do desenvolvimento do raciocínio matemático (e.g., AZEVEDO, 2009; FRANCISCO & MAHER, 2011; HENRIQUES, 2010). Boavida et al.

(2008) sugerem tarefas que facilitem o envolvimento dos alunos em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, ou seja, tarefas que promovam a resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação. Segundo as autoras, tais tarefas proporcionam uma "visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio [matemático]" (p. 7). Henriques (2010), na sua investigação com alunos do ensino superior, destaca particularmente as potencialidades das tarefas de exploração e investigação na aprendizagem dos alunos, não só ao nível dos conceitos e procedimentos, como também no desenvolvimento de capacidades como o raciocínio matemático. Complementarmente, como refere Brodie (2010), tarefas que promovam resultados diversos ou representações várias, que culminem em desacordos e desafios ou que deem aos alunos "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjeturar e justificar" (p. 47) são também propensas ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Com o intuito de envolver os alunos na resolução das tarefas propostas, Brodie (2010), refere que não é desejável que todas elas sejam de nível de exigência elevado. Tal exigência, além de não ser exequível em períodos limitados de tempo, poderia promover desmotivação e desinteresse por parte de muitos alunos. Por um lado, é desejável que sejam propostas aos alunos tarefas desafiantes, pois tal desafio incita o raciocínio matemático. Por outro lado, é igualmente importante que sejam propostas tarefas com um nível de desafio reduzido, para que os alunos se envolvam nas tarefas propostas. Deste modo, o nível de desafio de uma tarefa deve ser considerado na sua construção, atendendo aos alunos a quem a tarefa é proposta. Adicionalmente, a articulação entre tarefas com diferentes níveis de exigência e de desafio é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Ainda que se possam construir ou propor as mais variadas tarefas aos alunos, não existe uma garantia que estas conduzam necessariamente ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Para isso é fundamental promover interações em sala de aula que incitem os alunos a explorar, apresentar e discutir processos de raciocínio. No entanto, é importante ter presente que os alunos apresentam muitas vezes dificuldades em responder a tarefas que envolvem o raciocínio matemático por não estarem "habituados a 'explorar' as tarefas tanto quanto [possam]" (BRODIE, 2010, p. 55). Tarefas de natureza exploratória podem promover "uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação (...) [facilitando] o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas" (HENRIQUES, 2010, p. 373), incentivando alterações positivas nas atitudes dos alunos face à Matemática. Assim, é importante persistir no desafio de construir e propor tarefas de natureza variada pois as tarefas de exploração, bem como a resolução de problemas, parecem trazer aos alunos situações que conduzem ao desenvolvimento do raciocínio matemático e à compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos.

4 Ações do professor

Mesmo considerando tarefas de natureza exploratória ou problemas, a sua realização em sala de aula precisa de ser conduzida de modo a que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático. Neste contexto, as ações do professor surgem como um aspeto complementar e igualmente central para promover o raciocínio matemático dos alunos. No entanto, tal como a construção e seleção de tarefas a propor é um processo desafiante e complexo, “seria desonesto fingir que as abordagens de ensino [que promovem o raciocínio matemático] são fáceis ou bem compreendidas” (BOALER, 2010, p. v).

Uma das ações do professor fundamental para promover o raciocínio matemático dos alunos é o questionamento. De acordo com o NCTM (2009), o professor deve resistir ao impulso de dar indicações para a resolução de tarefas e problemas, tentando apoiar o raciocínio e o trabalho do aluno. Se o professor apresenta demasiadas indicações aos alunos e não os desafia, a resolução da tarefa é simplificada e não apoia o desenvolvimento do raciocínio (BRODIE, 2010). Contudo, o professor também não deve deixar os alunos a trabalhar, individualmente ou em grupo, sem qualquer mediação pois esta situação “não traz necessariamente apoio suficiente para desenvolver o seu raciocínio” (BRODIE, 2010, p. 20). Pelo seu lado, o NCTM (2009) refere que o professor deve: (i) “pedir aos alunos que reformulem o problema usando as suas próprias palavras” e (ii) “colocar questões aos alunos que promovam o aprofundamento do seu pensamento, por exemplo, ‘porque é que isso funciona?’ ou ‘como é que sabes?’” (p. 11). Bell (2011) destaca ainda que o professor deve incentivar os alunos a dar sentido a justificações, pedir justificações alternativas, salientar o que valida uma justificação e enfatizar a explicação do “porquê”.

Brodie (2010) indica que os alunos tendem a esperar certos tipos de perguntas por parte do professor. Se as perguntas são habitualmente mais provocatórias, os alunos esperam ter de dar respostas mais complexas e que envolvam processos de raciocínio. Para além do questionamento, o professor pode ainda empreender outras ações tendo em vista a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio. Brodie

(2010) refere que o professor deve incentivar os alunos a ouvir os colegas e a construir sobre as ideias dos outros, eventualmente colocando também os seus desafios. A autora salienta ainda que, além de encorajar os alunos a comunicar e partilhar as suas ideias, o professor deve também incentivar os alunos a escrever e partilhar várias versões do seu raciocínio. Wood (1999) destaca ainda que o professor deve criar e explorar situações de desacordo entre os alunos, pelas suas potencialidades para o desenvolvimento da capacidade de argumentação e, consequentemente, do raciocínio matemático. Para que a discussão e reflexão sobre as tarefas propostas seja promotora tanto do raciocínio matemático como da aprendizagem é também importante que, por um lado, se aceitem, valorizem e integrem as contribuições incorretas ou parciais dos alunos e, por outro lado, se alarguem e explorem as suas contribuições corretas (BRODIE, 2010).

Durante a discussão e reflexão sobre as tarefas propostas, devem ainda ser consideradas outras ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, particularmente direcionadas para os processos de raciocínio em si mesmos. Quanto à justificação, Brodie (2010) refere que o professor não deve apenas solicitar justificações aos alunos, mas também justificar as suas próprias ideias. Por outro lado, e de acordo com Galbrait (1995), os professores têm, tipicamente, dificuldades em ensinar processos de raciocínio mais formais, nomeadamente a justificação formal ou a demonstração. A abordagem do professor à demonstração passa recorrentemente por quatro fases: (i) discutir demonstrações completas, (ii) indicar quais os aspetos lógicos a considerar, deixando as justificações para os alunos, (iii) fazer uma demonstração, e (iv) levar os alunos a fazer uma demonstração que usa essencialmente a mesma estrutura lógica da que fez anteriormente. Contudo, outras abordagens podem mostrar-se mais eficazes na aprendizagem de processos de raciocínio próximos da demonstração, nomeadamente, a justificação como atividade coletiva promovida no âmbito da discussão das tarefas propostas pelo professor, onde os alunos têm "oportunidades para partilhar, debater e clarificar [o seu raciocínio]" (GALBRAIT, 1995, p. 416). Nesta situação, como refere Brodie (2010), considerar argumentos de colegas "pode ser uma fonte poderosa de desenvolvimento do raciocínio e argumentos do aluno" (p. 19). Ao moderar a discussão, e sempre que se mostre pertinente, o professor deve enfatizar quais as características de uma justificação para esta ser considerada válida. Por exemplo, em situações em que os alunos se convençam que uma determinada afirmação é verdadeira baseando-se em raciocínios indutivos com um número limitado de casos particulares, cabe ao professor destacar que tal raciocínio pode não constituir uma justificação aceitável. Neste sentido, é importante que as tarefas propostas que levam a esta ação por parte do professor incluam justificações aceitáveis e não aceitáveis baseadas em raciocínios indutivos. Coffland (2012) indica que esta ação, ainda que possa não ser suficiente para eliminar todos os vestígios de raciocínios indutivos indevidamente justificados, pode proporcionar alguma experiência necessária para desenvolver justificações apropriadas. Ainda no âmbito das discussões e sínteses finais de tarefas propostas aos alunos, é importante salientar que o planejamento destas situações é fundamental pois permite ao professor estabelecer objetivos claros para a discussão e síntese que podem alargar a exploração das tarefas à formulação de novas questões ou conduzir a novas tarefas promotoras do raciocínio matemático (HENRIQUES, 2010).

5 Metodologia de investigação

5.1 Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

Tendo por objetivo a construção de uma teoria local sobre a promoção do raciocínio matemático em sala de aula, este estudo segue uma metodologia de investigação baseada em design (IBD, *design-based research*) com ciclos de intervenção e revisão (COBB et al., 2003; PONTE, CARVALHO, MATA-PEREIRA & QUARESMA, 2016). Optar por uma IBD permite introduzir alterações à prática em sala de aula que advêm de combinar e recombinar elementos da investigação no sentido de promover uma abordagem útil e efetiva no contexto específico em que a investigação se desenvolve (WOOD & BERRY, 2003).

O primeiro ciclo de intervenção, ao qual este artigo diz respeito, é realizado numa turma de 8.º ano de uma professora com 13 anos de serviço, convidada pela sua experiência e empenho em melhorar a sua prática profissional. A turma tem 30 alunos, sendo que 2 estão em situação de abandono escolar, pelo que não são considerados neste estudo. Dos 28 alunos que frequentam as aulas, 16 são raparigas e 12 são rapazes e, de acordo com a professora, 7 alunos têm muito bom desempenho na disciplina, 13 têm um desempenho regular e 8 têm algumas dificuldades. Na turma existe um ambiente de trabalho muito produtivo, ainda que a professora refira que existe uma disparidade entre o trabalho desenvolvido pelos melhores alunos e pelos alunos com mais dificuldades. A planificação das aulas da intervenção resulta do trabalho conjunto entre a primeira autora e a professora e as aulas são posteriormente lecionadas exclusivamente pela professora. A recolha de dados neste ciclo de investigação ocorre nas reuniões de preparação de aulas com a professora da turma e na sala de aula. Todos os momentos são vídeo e áudio gravados e complementados com registos em diário de bordo. A utilização destes processos de recolha de dados tem por objetivo reconhecer e fundamentar as ações da professora em sala de aula, bem como atentar aos processos de raciocínio matemático dos alunos.

5.2 Princípios de design e conjetura da IBD

Um dos pontos centrais na IBD é a definição dos princípios de design subjacentes à intervenção. Considerando o objetivo de estudo e o seu foco nas ações do professor, parte destes princípios referem-se a este aspeto da prática profissional do professor de Matemática, respeitando os restantes às tarefas a propor aos alunos. Os princípios de design são ainda enquadrados pelo ensino exploratório, partindo do pressuposto de que este ensino pode proporcionar aos alunos momentos favoráveis ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Considerando a que se pretende uma atividade dos alunos marcada pelo ensino exploratório, a planificação da aula considera momentos de introdução da tarefa, de trabalho autónomo acompanhado pelo professor e momentos de discussão coletiva e síntese. De entre estes momentos, é de destacar a discussão coletiva, com grande potencial para promover a aprendizagem (PONTE, 2005) e também o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. A discussão, muitas vezes desencadeada pela realização de tarefas desafiantes, pode incluir a apresentação pelos alunos de uma variedade de respostas inesperadas. Assim, cabe ao professor articular estas respostas e promover uma discussão que leve os alunos a uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas envolvidas (STEIN, ENGLE, SMITH & HUGHES, 2008). Neste sentido, são determinantes tanto as características das tarefas a propor aos alunos, como as ações do professor desencadeadas por essas tarefas, motivo pelo qual são definidos princípios gerais de design referentes a estes dois aspetos.

Atendendo às perspetivas destacadas no quadro teórico previamente apresentado, os princípios gerais de design definidos para as tarefas são os seguintes: a) propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas, b) propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações, c) propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução, e d) propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio. Quanto aos princípios gerais de design para as ações do professor no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos, consideramos os seguintes princípios: i) acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa, ii) solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva, iii) destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida, iv) propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos, v) encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva, vi) aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique, e vii) desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações. Assim, a conjetura desta investigação baseada em design é que uma intervenção baseada nestes pressupostos contribui para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

5.3 Primeiro ciclo de intervenção

O primeiro ciclo de intervenção é realizado numa unidade de ensino sobre sequências, na referida turma de 8.º ano. O tópico sequências já havia sido abordado no ano anterior, e nesta unidade de ensino decorre em três aulas de 90 minutos. Por não haver continuidade pedagógica face ao ano anterior, opta-se por iniciar a unidade de ensino por uma tarefa que a própria professora refere como sendo "em simultâneo [uma tarefa] de introdução, mas também para mim [professora] de diagnóstico, porque eu não fui professora [da turma no ano anterior]" (Reunião inicial). Além desta tarefa inicial, são propostas mais três tarefas, sendo que as quatro tarefas são elaboradas e/ou adaptadas atendendo aos princípios de design definidos e às características particulares da turma em questão. Na sua grande maioria, as questões das tarefas são adaptadas de tarefas já existentes, provenientes de investigação no âmbito do tópico das sequências. Estas tarefas são propostas pela primeira autora (enquanto investigadora), discutidas com a professora da turma e ajustadas sempre que necessário. Definidas as tarefas e os objetivos de cada questão, são discutidos os objetivos dos momentos de introdução das tarefas, de trabalho autónomo e de discussão coletiva, bem como as ações esperadas por parte da professora no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos. Tanto as tarefas propostas como as ações esperadas por parte da professora são sempre norteadas pelos princípios de design.

5.4 Análise de dados

Neste artigo analisamos momentos de discussão coletiva de duas tarefas realizadas durante a intervenção. Estes momentos de discussão coletiva são selecionados por serem ilustrativos tanto das tarefas propostas como das ações da professora nesta unidade de ensino. Assim, a análise destes momentos pretende ser representativa do ciclo de intervenção, apresentando o modo como as tarefas propostas e as ações do professor podem contribuir para promover o raciocínio matemático dos alunos. A análise é realizada com apoio do software Nvivo e considera os princípios de design desta IBD, os processos de raciocínio dos alunos, nomeadamente as generalizações e justificações, e ainda as ações do professor com base no modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) (Figura 1). Este modelo destaca ações relacionadas com processos matemáticos, nomeadamente, ações de convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar são, geralmente, as que dão início à discussão coletiva ou a um segmento desta discussão, onde o professor incentiva os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções. No decorrer da discussão o professor recorre essencialmente aos outros três tipos de ações, que visam diretamente a aprendizagem por parte dos alunos. Nas ações de informar/sugerir o professor disponibiliza informação aos alunos ou valida as suas afirmações, enquanto nas ações de apoiar/guiar conduz os alunos a apresentar informação. Já nas ações de desafiar, incentiva os alunos a ir além do seu conhecimento prévio. Nestes três tipos de ações centrais na discussão, os autores consideram ainda diversos processos matemáticos envolvidos, não necessariamente disjuntos: representar, interpretar, raciocinar e avaliar. Atendendo ao nosso objetivo, na análise com este modelo focamo-nos essencialmente nas ações do professor relacionadas com processos de raciocínio.

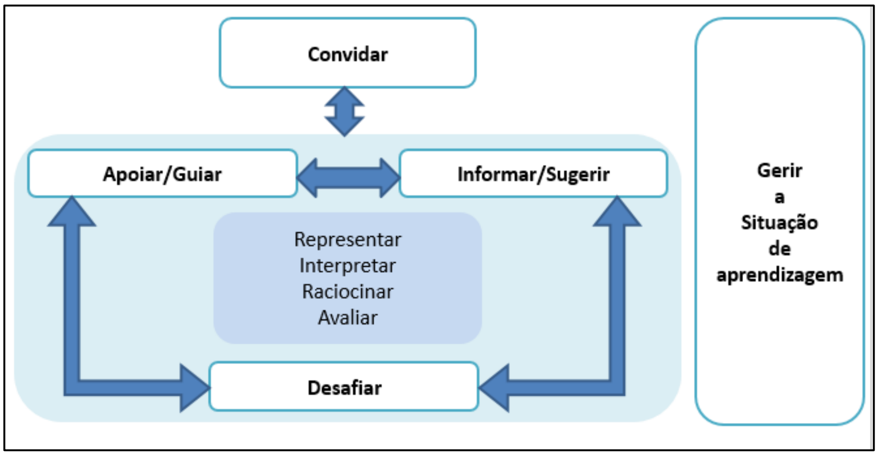


Figura 1 - Modelo para analisar as ações do professor (adaptado de PONTE, MATA-PEREIRA & QUARESMA, 2013)

6 A tarefa de introdução

A tarefa proposta para a introdução da unidade de ensino sobre sequências é a apresentada na Figura 2. Esta tarefa, de natureza exploratória (princípio a), inclui questões de nível de desafio reduzido, como a questão 1.1, e questões de nível de desafio mais elevado, como a questão 1.5 (princípio d). Esta última questão, ao solicitar o termo geral da sequência, incita a formulação de uma generalização (princípio b). Uma parte das questões solicita ainda explicações ou justificações (princípio c).

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

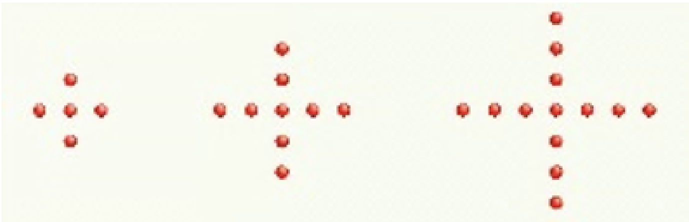


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 2 - Tarefa de introdução proposta aos alunos (criada pela professora da turma e pelos autores)

A tarefa é proposta aos alunos e os alunos trabalham autonomamente, seguindo-se um momento de discussão coletiva. Relativamente à questão 1.1., a professora começa por *convidar* os alunos a partilhar as suas respostas, alertando para a possibilidade de poder existir uma variedade de estratégias de resolução. Seleciona então um dos pares de alunos que se voluntariam a participar:

Marisa: [Respondemos] que a figura tinha 17 pontos.
Professora: 17 pontos. Porque é que responderam isso?
Marisa: Porque nós desenhámos a figura e…
Professora: Contaram?
Marisa: Sim.
Professora: OK. Foi a estratégia delas. Desenharam e contaram. Quem usou uma estratégia diferente?

Ainda que a professora selecione um par que indica a resposta correta à questão, não avança de imediato para outra questão, optando por *guiar* Marisa a justificar a sua própria resposta. Reforça ainda a resposta de Marisa ao *informar* a restante turma da estratégia deste par. Neste segmento inicial da discussão, a professora solicita a explicação do "porquê" (princípio ii), destaca a justificação como válida (princípio iii) e encoraja ainda a partilha de ideias (princípio v), não apenas com este par, mas também incentivando os alunos a apresentar justificações alternativas (princípio ii). Perante as ações da professora, Marisa justifica a sua resposta, ainda que não o tenha feito inicialmente.

Num outro segmento da discussão, referente à questão 1.3, a professora torna a *convidar* os alunos a participar, selecionando o par Duarte e Marisa:

> *Duarte: Nós fizemos 86, que é o número de pontos (...) A dividir por 4, menos 1.*
> *Professora: Assim [escreve no quadro (86-1)/4]? Só fala o Duarte.*
> *Duarte: Foi. 86 menos 1 a dividir por 4.*

Ao representar a resposta de Duarte no quadro, a professora interpreta a representação do aluno de um modo diferente do que ele disse inicialmente, aceitando a contribuição incorreta (princípio vi) e *guiando*-o a redizer a sua resposta. Considerando as duas versões da resposta, a professora opta por explorar um pouco mais a situação (princípio vi), *desafiando* o aluno a interpretar a expressão selecionada (princípio vii):

> *Professora: Assim Duarte [referindo-se a (86-1)/4]? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto ou é isto [escreve 86/4-1]?*
> *Duarte: Primeira.*
> *Professora: [Um aluno intervém.] Espera, espera, deixa-o concluir. Explica.*
> *Diogo: Vai dar a mesma coisa.*
> *(...)*
> *Professora: Só para perceber, Diogo. Não tem mal dizer que é a mesma coisa, só quero perceber. Para ti isto é a mesma coisa?*
> *Diogo: Sim, porque se nós pusermos um sobre… Não, não, não é nada a mesma coisa (...) Só se fosse menos quatro [na primeira expressão].*

Diogo interrompe a resposta de Duarte apresentando uma conclusão errada. Com o *apoio* da professora, que o leva a justificar a sua afirmação, consegue rapidamente compreender o seu erro (princípios v e vi).

Resolvida esta situação, a professora retoma a estratégia de Duarte:

> *Professora: Duarte, perdi-me, explica-me.*
> *Duarte: É isso.*
> *Professora: Mas é isto, o que é isto?*
> *Duarte: Então, é o número de pontos que é 86 (...) Depois subtraímos um que é o ponto do meio (...) E depois a dividir por quatro que é o que vai sempre aumentando.*
> *Professora: Este quatro é sempre o que vão aumentando?*
> *Duarte: Não, é o número de lados.*

Professora: Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?
Duarte: 21,25.

Atendendo a que Duarte dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e posteriormente *guia* o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação, acompanhando a resolução apresentada dando apenas as indicações necessárias (princípio i). Perante a afirmação de Duarte, a professora continua a *apoiar* a resposta do aluno, pedindo-lhe uma interpretação do valor obtido e levando-o a justificar essa interpretação (princípio ii):

Professora: E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?
Duarte: Que não existe nenhuma.
Professora: Porquê?
Duarte: Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.
Professora: Número inteiro. Este número não é inteiro.

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao *informar* a turma de que o valor que o aluno obteve não é um número inteiro, interpretando e validando a sua resposta (princípio iii).

A professora *convida* os alunos a apresentarem mais estratégias (princípio v) e António apresenta a sua, que a professora valida, enfatizando essa validação (princípios ii e iii):

Professora: Quem pensou de outra forma? (...)
António: À medida que pensámos, mais quatro, os números iam ser sempre ímpares. Então, o número ia ter sempre mais quatro unidades.
(...)
Professora: OK. Eles foram somando. A sequência é uma sequência de números ímpares (...) Na sequência não aparecem [números pares]. Justifiquem, acrescentem esta justificação, OK? Que era outra forma de justificar. Não aparecem números pares.

Neste momento da discussão, não surgem outras estratégias por parte dos restantes alunos e a professora avança para a discussão da questão 1.4, onde um par de alunos apresenta e justifica a sua resolução, com o *apoio* da professora. Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceite pela professora (princípio v):

Joaquim: Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.
Professora: Então diz.
Joaquim: Nós fizemos… Nós justificámos que não era múltiplo de 4.
Professora: Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda

não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora *desafia* os alunos a avaliar a validade desta resolução (princípio iii). Direciona primeiramente a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par que ainda não tinha participado:

> *Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central.*
>
> *Professora: Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.*

Bianca indica implicitamente que a resposta dos colegas não é válida e justifica a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a sua resposta é inválida. Perante esta situação, a professora poderia sugerir uma interpretação da justificação de Bianca, mas opta por *desafiar* a aluna a reformular a sua justificação (princípio vii):

> *Bianca: O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.*
>
> *Professora: Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?*
>
> *Bianca: Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.*
>
> *Professora: Sim ou não, Guilherme?*
>
> *Guilherme: Acho que sim, porque o do meio nunca… Era como se estivéssemos a cortar o do meio.*
>
> *Professora: Aqui era como se estivessem a cortar o do meio (...) A soma destes quatro braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos quatro braços com o ponto central.*

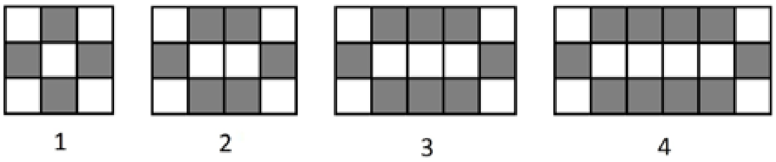
Não obstante a validade da afirmação de Bianca, a professora *desafia* novamente a aluna para que justifique parte dessa afirmação (princípio ii). Neste momento, a professora confirma se Guilherme compreendeu a justificação de Bianca e *informa* a turma da representação destacada pelo aluno.

Nos segmentos da discussão coletiva aqui apresentados, que representam apenas parte da discussão desta tarefa introdutória, a professora inclui nas suas ações a grande maioria dos princípios de design pretendidos, o que leva a justificações por parte dos alunos. Particularmente, o princípio referente a solicitar a explicação do “porquê” (princípio ii), tanto em situações em que a tarefa não solicita uma justificação (princípio c) como em situações inesperadas, incita os alunos a apresentar justificações. Estas justificações, quando válidas, são acompanhadas por ações de guiar e de informar por parte da professora. Já quando as justificações apresentadas são incorretas ou apenas parcialmente corretas é mobilizado o princípio que respeita a aceitar contribuições parciais ou incorretas e, com base em ações de apoiar/guiar e de desafiar, os alunos tendem a completar as suas justificações ou apresentar justificações alternativas. Contudo, e ainda que sejam identificadas justificações válidas e inválidas (princípio iii) com base em ações de informar, nem sempre é destacado o que as valida.

Quanto aos princípios de design da tarefa, estes parecem contribuir apenas indiretamente para os processos de raciocínio dos alunos, pois as justificações são apresentadas na sequência de ações da professora. No entanto, é a natureza da tarefa que permite que surjam na discussão coletiva momentos onde são explorados processos de raciocínio.

7 A segunda sequência

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



1.1. Indica o número total de quadrados da figura 5.

1.2. Quantos azulejos, no total, tem a 20ª figura? Explica a tua resposta.

1.3. Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados.

Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
…			
n			

←Termo geral

Figura 3 - Parte da segunda tarefa proposta aos alunos (adaptado de PONTE, MATOS e BRANCO, 2009)

Na segunda aula da unidade de ensino é proposta uma tarefa apresentada em parte na Figura 3. Esta tarefa começa por ter uma estrutura muito semelhante à tarefa introdutória, sendo também de natureza exploratória (princípio a), com aumento do nível de desafio ao longo da tarefa (princípio d). A última questão aqui apresentada incita a formulação de generalizações (princípio b). A questão 1.2 solicita ainda uma explicação da resposta obtida (princípio c).

A segunda aula da unidade de ensino tem início com uma síntese sobre a terminologia utilizada no tópico das sequências, nomeadamente, termo e ordem de uma sequência. Após este momento de síntese é apresentada a tarefa aos alunos que, de seguida, os alunos trabalham autonomamente. No início da discussão coletiva referente a esta tarefa, a professora começa por retomar a questão da terminologia, o que gerou ainda alguma discussão e posteriormente avança para o *convite* à discussão da tarefa em si (princípio v). A professora passa a palavra ao par Bruno e Andreia, e Andreia partilha a sua resposta à questão 1.1:

> *Andreia: Então... Eu encontrei o termo geral dos quadrados cinzentos e dos quadrados brancos.*
> *Professora: Fizeste logo isso, foi a tua primeira abordagem? (...) Como é que fizeste Andreia? Explica-me.*
> *Andreia: Dos quadrados cinzentos (...) Eu pus que era 2n mais 2 (...) E dos quadrados brancos é n mais 4.*

Ainda que a resposta dada por Andreia vá além do pretendido com a questão 1.1, a professora *guia* a aluna para que prossiga com a sua explicação (princípios i, v e vii), levando-a a apresentar a generalização pretendida com a questão 1.3.

> *Professora: [Escreve as expressões referidas por Andreia]. A Andreia foi logo para o termo geral. Explica-me lá Andreia, estas expressões.*
> *Andreia: Olhei para a figura e vi que por baixo estava (...) Estava dois. Então eu vi que de cima e de baixo era dois também.*
> *Professora: A Andreia reparou isto. Na ordem 2, se a figura era a figura dois, havia dois [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo da figura] e dois cinzentos aqui [na linha de cima da figura]. Aqui há dois, aqui há dois. Reparem, se a figura for a figura 3, eu tenho 3 [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo] e três [quadrados] cinzentos aqui [na linha de cima].*
> *(...)*
> *Andreia: E depois tinha mais dois de cada lado.*
> *Professora: 2n mais os dois das pontas, muito bem. E os brancos?*

Perante as expressões apresentadas por Andreia, a professora *desafia* a aluna a apresentar uma justificação para os termos gerais (princípio ii). A professora *sugere* ainda uma interpretação do que é referido por Andreia (princípio vi). De um modo idêntico, a professora torna a *desafiar* a aluna para justificar o termo geral referente aos azulejos brancos, *informando* a turma ao interpretar as justificações de Andreia (princípios ii e vi). No final deste segmento de discussão, com ações de *guiar* por parte da professora (princípio i), a aluna apresenta a resolução da questão 1.1 substituindo corretamente o n das suas expressões por 5.

Num outro segmento da discussão desta tarefa, já referente à questão 1.3, Guilherme refere também uma generalização, apresentando um termo geral distinto do apresentado anteriormente por Andreia, *(2n + 2) + (n + 4)*, correspondente à adição dos termos gerais relativos aos quadrados cinzentos e os quadrados brancos:

> *Guilherme: Foi um que é 6 mais 3n.*
>
> *Professora: E isso tem alguma relação com o que a Andreia fez? Agora sou eu a pôr-vos a pensar. O termo do Guilherme (...) 6 mais 3n. Qual é a relação do teu termo geral com aquilo que a Andreia fez? (...) Não há relação nenhuma, há alguma relação...*

Perante o termo geral apresentado por Guilherme, a professora *desafia* os alunos a relacioná-lo com o termo geral apresentado anteriormente por Andreia (princípio vii). Contudo, a justificação dessa relação torna-se difícil de apresentar por parte do par Guilherme e Álvaro, por dificuldades de comunicação:

> *Guilherme: Sim, o meu, os 6 era dos que mantinha de lado.*
>
> *(...)*
>
> *Álvaro: O três é o número de... Pronto... É o número de... [gesticula aproximando e afastando as mãos na horizontal]*
>
> *Professora: De quê? Eu gosto desse símbolo [gesticula imitando o Álvaro]. Tem de haver alguma forma de comunicar. Das duas uma, ou trabalho com linha e coluna, ou utilizam linha sempre mas dizem vertical ou horizontal. O 3, atenção, são estas 3 filas de quadrados [3 linhas], que são exatamente iguais.*

Considerando as dificuldades de comunicação deste par de alunos, a professora opta por *sugerir* a interpretação do 3 na expressão algébrica apresentada por Guilherme (princípio vi). Quase de imediato, Ivone apresenta uma interpretação alternativa face ao mesmo valor:

> *Ivone: Eu não estava a ver assim.*
>
> *Professora: Estavas a ver como Ivone? Como é que tu vias o 3 de outra forma? Eu, na vertical, está sempre a variar, não vejo 3.*

Nesta situação, a professora, implicitamente, *desafia* a aluna a explicar a sua interpretação (princípio ii), salientando o que pode invalidar a sua justificação (princípio iii). Ivone aceita o desafio da professora, justificando a sua interpretação:

> *Ivone: Eu vejo 3, porque, por exemplo, a stôra, tem três quadrados, tem uma coluna (...) Ou seja, são três quadrados que existem nessa coluna. Então, se nós pegarmos na ordem, três, esses três vezes quatro [ordem], vemos sempre os quadrados que há nessa figura sem ser aqueles seis.*
>
> *Professora: É verdade.*
>
> *Ivone: Vocês estão a ver na horizontal, eu vi na vertical (...) A stôra relacionou o 3 com as linhas.*
>
> *Professora: Mas percebeste porquê? Porque o n, só para dizer o que o Álvaro disse, como o n é a ordem, n, mais n, mais n [apontando para cada linha*

na figura 4], 3n. Agora tu, dá-me lá outro argumento (...) Justifica melhor.

Ainda que Ivone apresente a sua justificação, a professora opta por solicitar uma justificação alternativa (princípio ii) com o intuito de melhor informar os alunos sobre a situação (princípios v e vi). Mais uma vez, Ivone dá resposta ao *desafio* da professora, explicitando a sua justificação com base num caso particular:

Ivone: Três colunas, a... Uma coluna… Está dividida em três partes, certo?
Professora: Sim, está dividida em três partes. Percebi. Esta coluna, tem este, este e este.
Ivone: E nessa figura existem quatro colunas iguais.
Professora: Ah, estas quatro colunas iguais.
Ivone: Exatamente. Se nós fizermos as três coisas que há numa coluna vezes o termo [referindo-se à ordem]...
Professora: Porque aqui há sempre o mesmo número de colunas que a ordem do termo?
Ivone: Exatamente!

A primeira generalização que emerge nos segmentos de discussão aqui apresentados não advém das ações da professora, mas sim da própria tarefa, por se tratar de uma tarefa de exploração (princípio a). Tal como na tarefa anterior, as ações da professora incluem a grande maioria dos princípios de design pretendidos, o que, no caso desta discussão coletiva, leva não só a justificações por parte dos alunos, mas também a generalizações. Nesta discussão, os pedidos de justificação por parte da professora (princípio ii) também incitam os alunos a apresentar justificações. Contudo, grande parte destas justificações emergem na sequência de uma generalização introduzida por uma aluna e não estão diretamente relacionadas com questões da tarefa. Por este motivo, as ações da professora são maioritariamente de desafiar e de sugerir associadas, respetivamente, a solicitar a explicação do "porquê" (princípio ii) e a aceitar e valorizar contribuições parciais (princípio vi). Esta situação ocorre tanto quando os alunos apresentam uma justificação adequada como quando os alunos não conseguem chegar de imediato à justificação pretendida.

8 Conclusão

Um dos aspetos salientes nos dados apresentados é que as ações do professor nos momentos de discussão coletiva são essenciais para que processos de raciocínio possam emergir em sala de aula. Neste ciclo de intervenção, estas ações, orientadas pelos princípios de design, não seguem uma ordem ou sequência pré-estabelecida, mas surgem em função das circunstâncias, relacionando-se com diferentes aspetos. Assim, ainda que a discussão de cada questão da tarefa seja iniciada por uma ação de convidar por parte da professora, as ações seguintes estão relacionadas essencialmente com as intervenções dos alunos e as oportunidades que estas criam para o prosseguimento da aula. Na verdade, a imprevisibilidade das discussões coletivas suscita a uma diversidade de ações por parte da professora. Esta imprevisibilidade é visível tanto na discussão da primeira tarefa, em que foi necessário discutir propriedades das operações por surgirem as expressões numéricas $\frac{86-1}{4}$ e $\frac{86}{4} - 1$, como na discussão da segunda tarefa, com a introdução do termo geral logo no início da discussão. A análise sugere também que a natureza exploratória das tarefas influencia as ações do professor visto que as questões da tarefa mais complexas levam a questões orais mais desafiantes por parte do professor. Tal como refere Brodie (2010), obter respostas corretas não é o objetivo último da discussão e, por isso, as respostas corretas constituem oportunidades de desafio para aprofundar ideias ou conceitos matemáticos.

É esta diversidade de ações do professor, possibilitadas pela tarefa proposta, que permite que processos de raciocínio matemático surjam nos momentos de discussão coletiva. Neste estudo, os momentos onde emergem processos de raciocínio matemático discussão coletiva representam uma parte significativa dessa discussão, o que vai bastante além do referido por Brodie (2010) que classifica estes momentos como raros. Os princípios de design parecem assim contribuir para que, nas discussões coletivas, surjam processos de raciocínio matemático centrais como a generalização e a justificação. Quanto ao modo como estes princípios contribuem para o raciocínio matemático dos alunos, destacamos que as justificações apresentadas pelos alunos parecem emergir dos momentos de discussão coletiva essencialmente associadas aos princípios referentes a solicitar a explicação do "porquê" e a valorizar contribuições incorretas ou parciais, sendo suscitadas por ações de guiar e de desafiar por parte da professora. Destacamos ainda que as generalizações, no caso desta unidade de ensino em muito associadas ao termo geral da sequência, tendem a surgir na própria realização da tarefa, pelas suas características enquanto tarefa exploratória e por incluírem questões que incitam a formulação de generalizações. Estas generalizações são formuladas durante o trabalho autónomo dos alunos e posteriormente apresentadas e justificadas nos momentos de discussão coletiva, associadas a ações de convidar e de guiar. Ainda que estes princípios de design sejam os que mais se destacam na promoção do raciocínio matemático, os restantes princípios são também mobilizados e parecem contribuir para criar um ambiente propenso à inclusão de processos de raciocínio. Deste modo, os princípios de design enunciados parecem proporcionar oportunidades para que os processos de raciocínio matemático tenham lugar na sala de aula, sendo que o modelo utilizado para analisar as ações do professor que lhes estão associadas (PONTE, MATA-PEREIRA & QUARESMA, 2013) contribui para compreender os modos como estes princípios podem ser postos em prática em sala de aula.

O ciclo de intervenção aqui analisado sugere a possibilidade de ir mais além tanto ao nível dos princípios de design referentes às tarefas como às ações do professor. Por um lado, os momentos de discussão de questões que permitem uma variedade de processos de resolução parecem contribuir para que surjam processos de raciocínio matemático. Por outro lado, os desafios feitos pelo professor no sentido de ir além da tarefa não se limitam a novas questões e generalizações, pois parte dos desafios que vão além da tarefa remetem para justificações, provendo também o raciocínio matemático.

Ainda que a presente investigação seja um contributo para o conhecimento sobre os modos de promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, as generalizações e justificações que emergem no contexto de uma unidade de ensino sobre sequências têm características muito particulares. Investigações futuras com intervenções que visem generalizações e justificações noutros tópicos matemáticos poderão robustecer os princípios de design e as suas relações com as ações do professor, contribuindo para o conhecimento na área do raciocínio matemático.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsa atribuída a Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. Synthese, Netherlands, n. 134, p. 25-44. 2003.

AZEVEDO, A. O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação na Área de especialização de Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

BELL, C. Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. Mathematics Teacher, Reston, VA, v. 104, n. 9, p. 690-695. 2011.

BOALER, J. The road to reasoning. In: BRODIE, K. Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms. 1.ª edição. New York, NY: Springer, 2010. p. v-vii.

BOAVIDA, A; PAIVA, A.; CEBOLA, G.; VALE, I; PIMENTEL, T. A experiência matemática no ensino básico. Lisboa: DGIDC-ME, 2008.

BRODIE, K. Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms. 1.ª edição. New York, NY: Springer, 2010.

BROUSSEAU, G.; GIBEL, P. Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. Educational Studies in Mathematics, Netherlands, n. 59, p. 13-58. 2005.

COBB, P.; CONFREY, J.; diSESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. Educational Researcher, Washington, DC, v. 32, n. 1, p. 9-13. 2003.

COFFLAND, D. A. Closing in on proof. Mathematics Teaching in the Middle School, Reston, VA, v. 17, n. 8, p. 494-500. 2012.

FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands, v. 14, n. 1, p. 49-66. 2011.

GALBRAIT, P. Mathematics as reasoning. The Mathematics Teacher, Reston, VA, v. 88, n. 5, p. 412-417. 1995.

HENRIQUES, A. O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação. 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

LANNIN, J.; ELLIS A. B.; ELLIOT, R. Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: NCTM, 2011.

NCTM. Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making. 1st Edition. Reston, VA: _______, 2009.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. Educação e Matemática, Lisboa, n. 100, p. 3-9. 2008.

PÓLYA, G. Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954. (Vol. 1)

PONTE, J.P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J., QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar práticas educativas. Quadrante, Lisboa. v. XXV, n. 2, p. 77-98. 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. Quadrante, Lisboa. v. XXII, n. 2, p. 55-81. 2013.

PONTE, J.P.; MATOS, A; BRANCO, N. Sequências e Funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

RIVERA, F; BECKER, J. Algebraic reasoning through patterns. Mathematics Teacher in the Middle School, Reston, VA, v. 15, n. 4, p. 213-221. 2009.

RUSSEL, S. Mathematical reasoning in the elementary grades. In: STIFF, L. V.; CURCIO, F. R. Developing mathematical reasoning in grades K-12. Reston, V.A.: NCTM, 1999. p. 1-12. (NCTM Yearbook).

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, Adingdon. v. 10, n. 4, p. 313-340. 2008.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, VA. v. 30, n. 2, p. 171-191. 1999.

WOOD, T.; BERRY, B. What does “design research” offer mathematics teacher education? Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands, n. 6, p 195-199. 2003.

Anexo 3

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186. doi:10.1007/s10649-017-9773-4

Versão dos autores

Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification

Joana Mata-Pereira

jmatapereira@ie.ulisboa.pt

João-Pedro da Ponte

jpponte@ie.ulisboa.pt

1 Introduction

Engaging students in proving is a major challenge in school mathematics. Proving, the activity of making a proof, consists of mathematically arguing by sequencing assertions for or against a mathematical claim (Stylianides 2007). As indicated by Stylianides (2007), in order to be considered a proof, this connected sequence of assertions must include a set of accepted statements (e.g., definitions, theorems), forms of reasoning and modes of argument representation. In this paper, we focus on mathematical reasoning as a central element of students' proving activity.

Mathematical reasoning, besides providing students with conditions to engage in proving, allows them to go beyond the routine use of procedures towards learning concepts, properties, and procedures as logical, interrelated, and coherent aspects of mathematics. As such, developing students' mathematical reasoning in everyday classrooms is a core aspect of teaching and learning mathematics (Ball and Bass 2003; Boaler 2010). However, to promote students' mathematical reasoning, teachers need to provide challenging learning environments rather than just lessons where they solve exercises using well-known procedures. We take whole class mathematical discussions triggered by exploratory tasks (Ruthven 1989) as privileged moments to create opportunities to develop students' mathematical reasoning, especially the central reasoning processes of generalization and justification (Lannin, Ellis and Elliot 2011).

In this paper, we aim to develop knowledge about how teacher actions may enhance students' mathematical reasoning, an issue that we address by conducting a design-based research (Cobb et al. 2003). Thus, we design principles to support teachers in enhancing students' mathematical reasoning and conduct an intervention based on those principles. We illustrate and analyze this intervention through the lenses of characteristics of tasks, teacher actions, and students' generalization and justification processes. Therefore, this research-based intervention study (informed by theory and empirical evidence) aims both to contribute with a set of principles regarding tasks and teachers' actions designed to enhance students' mathematical reasoning and to illustrate how those principles might be enacted in the classroom and enhance students' mathematical reasoning.

2 Developing students' mathematical reasoning

2.1 Mathematical reasoning and reasoning processes

"Reasoning" is a very common term in mathematics education, but often with an imprecise meaning, close or synonymous of "thinking". We hereby consider mathematical reasoning as making justified inferences (Brousseau and Gibel 2005; Pólya 1954; Rivera and Becker 2009), using deductive, inductive, and abductive processes. Thus, mathematical reasoning processes include formulating questions and solving strategies, formulating and testing generalizations and other conjectures, and justifying them. We focus on generalizing and justifying as key mathematical reasoning processes.

Conjecturing, is to state something that is intended to be true, but that is still not known as such (Lannin et al. 2011). An important way of conjecturing, mathematical *generalizing*, is a process that leads to a statement referring to a common property of a group of objects (Dörfler 1991). Generalizing also comprises stating that a property or procedure, known for a certain set of objects or conditions, holds for a larger set of objects or conditions (Carraher, Martinez and Schliemann 2008). Being the foundation of mathematical concepts and ideas, this is a central reasoning process. It is essential to engage students in situations that promote generalizations since much mathematical learning may develop from these activities (Kieran, 2007). However, we must note that generalizations in the classroom may be unstated or incorrect (Becker and Rivera 2005; Reid 2002) and thus setting the need for elaboration and justification.

Justifying a claim or a result involves presenting reasons convincing to oneself and others (Sowder and Harel 1998). In order to do so, justifications need to rely on accepted concepts, properties, procedures, and mathematical ideas. Thus, it is essential that students understand the need for justification from very early in their schooling. Therefore, as Lannin et al. (2011) highlight, students should engage on justifying by relying on previously understood mathematical ideas or refuting statements by providing counter-examples. As these authors refer, it is also important that students develop knowledge about what validates an argument, rejecting arguments that depend on authority, perception, common sense, or just particular cases.

Students must be able to justify why a generalization is valid or not. As they advance through their schooling, the perception about what validates and invalidates a justification should lead to increasingly more formal justifications. These formal justifications, as they present mathematical reasons to support a claim, are often equivalent to proofs or a significant part of proofs. Thus, to prompt justifications is a fundamental move towards proving.

2.2 Tasks and teacher actions

Mathematical reasoning requires that students get involved in a variety of thinking and sense making processes. We may obtain traces of students' mathematical reasoning from their classroom work and from classroom interactions (Brodie 2010). Therefore, two basic elements of teacher professional practice are at stake: the tasks proposed to the students and the communication processes enhanced by teacher actions (Ponte and Quaresma 2016). Appropriate tasks are essential to support students' mathematics learning in the classroom (Brodie 2010; Christiansen and Walter 1986), in particular tasks that aim at developing mathematical reasoning. Therefore, it is necessary to know which tasks lead students to engage in mathematical reasoning, and in what ways they may be used in the classroom (Brodie 2010). Previous research identified problems and exploration and investigation tasks as means to develop students' mathematical reasoning (e.g., Francisco and Maher 2011). Also in this perspective, Ponte and Quaresma (2016) indicate that challenging tasks are a fertile ground to promote mathematical reasoning. However, proposing too many challenging tasks in a limited time may easily demotivate and disinterest many students (Brodie 2010). It is also important to propose tasks with a lower level of challenge aiming students to easily engage in the classroom activity. Also, tasks that lead to multiple representations or solving processes or that promote disagreements, may help to develop students' mathematical reasoning (Brodie 2010).

Notwithstanding their importance suitable tasks are not enough to ensure that students develop mathematical reasoning (Ball and Bass 2003). Within the complexity of professional practice, a key aspect to consider is teacher actions (sometimes also referred to as "teacher moves"). These teacher actions originate from the teacher's motives regarding the nature of the sought classroom activity (Christiansen and Walter 1986) and are central to achieve them. For instance, if the teacher gives students too many indications and suggestions, the task is simplified and solving it becomes a simple exercise, not requiring much reasoning. Also, if the teacher stays aside while students work, he/she may fail to provide the necessary support for students to carry out their reasoning (Brodie 2010). In classrooms marked by exploratory teaching (Ruthven 1989), whole class discussions have a strong potential to foster students' learning (Ponte 2005). As these discussions yield students opportunities to share, discuss, and evaluate their ideas they are also propitious to develop mathematical reasoning. In these discussions, teacher actions should value arguments that address the "why" of results and not just the results themselves (Sowder and Harel 1998). As Brodie (2010) indicates, the teacher should broaden and explore students' proper contributions and, if acceptable, value students' incorrect or partial contributions seeking that connections to the solution and to the meaning of concepts and mathematical ideas are made. Wood (1999) also points out that the teacher may explore disagreements between students, as such situations may develop their ability to justify. In order to do so, the teacher should create opportunities for students to consider others' ideas and critically evaluate their validity (Ball and Bass 2003). As such, the role of the teacher is to articulate students' contributions and advance the discussion leading them to the sought mathematical ideas (Stein, Engle, Smith and Hughes 2008).

Conducting those discussions is particularly complex as it often leads to unexpected student contributions. The teacher has to support both the content of the discussion and its management. Namely he/she has to be able to articulate multiple ideas that emerge from the students, to encourage students to elaborate their thinking, to lead them to evaluate and compare their ideas and often also to guarantee that important mathematical ideas are the focus of the classroom activity (Sherin 2002). A single question (either specific or general) is often not enough to uncover enough detail of students' reasoning processes, thus requiring a sequence of actions on following up students' ideas (Franke et al., 2009). This sequence of actions may encompass generating discussion, by requesting students' participation; orienting and focusing, by requesting for clarification or elaboration, providing a piece of information, a hint or a direction; and challenging or probing students (Kosko, Rougee and Herbst 2014; Krussel, Edwards and Springer 2004).

Within this scope of teacher actions, Ponte and Quaresma (2016) suggest a model (Figure 1) that distinguishes between actions directly related to mathematical topics and processes and actions related to management of learning. Regarding actions related to mathematical processes, *inviting actions* aim to trigger a whole class discussion or a discussion segment, where the teacher encourages students to participate or share their responses. Then, the teacher relies mostly on *informing/suggesting actions* to provide information to students or to validate their statements; on *supporting/guiding actions* to lead students to present information; and on *challenging actions* to encourage students to go further than their previous knowledge. In those three sets of actions, the authors refer several mathematical processes that are involved, not necessarily disjoint, such as representing, interpreting, reasoning, and evaluating. Regarding these mathematical processes, in this paper we focus only on reasoning using this model as a lens towards building elements for enhancing mathematical reasoning.

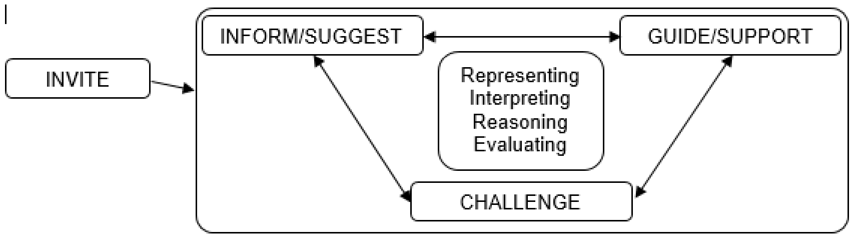


Fig. 1 Model to analyze teacher actions (adapted from Ponte and Quaresma 2016).

3 The design experiment

This research is conducted through a design experiment (Cobb et al. 2003) entailed to provide teachers the means to develop students' mathematical reasoning and researchers the tools to systematically analyze those means. In order to do so, design principles, i.e., heuristics that structure the intervention, focusing on tasks and teacher actions are drawn from the research literature and from a previous cycle of experimentation.

3.1 Design principles

Attending to the issues presented concerning tasks, to the reasoning processes that we highlight (generalization and justification), and to the results of a previous cycle of this design-based research, we formulate four general principles related to tasks. These principles indicate that tasks should include: (i) a diversity of questions of different levels of challenge, emphasizing problems and exploratory questions but also exercises; (ii) questions that prompt generalizations; (iii) questions that ask for justification of answers and of solving processes; and (iv) questions that allow a variety of solving processes.

Based both on the literature reviewed and on the previous experimentation cycle, we also consider some principles regarding teacher actions that aim to structure the intervention: (a) monitor students while they solve the task, aiming not to reduce its level of challenge; (b) ask students to explain "why" and to present alternative justifications; (c) highlight or ask students to identify valid and invalid justifications, emphasizing what may validate them; (d) encourage the sharing of ideas; (e) accept and value incorrect or partial contributions by deconstructing, supplementing, or clarifying them; (f) support or inform students in order to highlight reasoning processes such as generalizing and justifying, and (g) challenge students to go beyond the task by formulating new questions, generalizing or justifying.

Accepting these design principles regarding tasks and teacher actions is one thing, and implementing them in the classroom in ways that promote students' mathematical reasoning is another one, involving a significant challenge to the teacher. Thus, instead of attempting to impose from the outset certain tasks or teacher actions, we discuss all these elements with the teacher regarding how to create conditions to promote students' learning and the development of mathematical reasoning. This approach informs the intervention and allows to relate assumptions in the literature on the development of students' mathematical reasoning with new ideas regarding tasks and teacher actions. As Boaler (2010) suggests, these connections between the literature and teaching experience may bring powerful results.

3.2 Participants, context, and data collection

The intervention took place in a grade 7 class of a public school in Portugal, throughout four 90-minute lessons and five 45-minute lessons about linear equations. An algebraic topic was chosen since algebra is a powerful field to support mathematical reasoning. This intervention concerns the second cycle of the design-based research, after a first cycle that took place in lessons about sequences also aiming to develop students' mathematical reasoning. Given the nature of this design experiment, the participating teacher was selected by her exploratory teaching approach, her availability to consider changes in her practice, and her confidence to collaborate based on her teaching experience. Together with the teacher, the first author planned a unit about linear equations based on the design principles. Earlier in the year, the students had lessons about linear functions, with no participation from the researchers. Most tasks were proposed by the first author and then discussed and adjusted with the teacher in order to fit the class characteristics. Aiming to appropriately address the design principles during the intervention, the first author and the teacher had working sessions after each lesson. In these working sessions, a detailed plan of each lesson was also prepared with the teacher's contributions. Each lesson plan addressed learning goals, general strategy, lesson structure, resources to use, tasks, and learning activities, as well as expected students' responses and difficulties, expected teacher answers to those responses and difficulties, and aims and evaluation of each moment of the lesson. In order to inform this research, interviews were conducted prior to and after those nine lessons to both the teacher and selected students. All lessons were directly observed and all the interviews, lessons and working sessions were video and audio recorded and notes made in a researcher's logbook.

All participant students in this study are volunteer and had the right to withdraw from it at any moment. An informed consent was requested to all participants and, when appropriate, to their legal guardians. In order to respect their anonymity, all their names are fictitious.

3.3 Data analysis

Aiming to identify ways to promote students' mathematical reasoning, data analysis is centered on teacher actions during whole class discussions (presented in Figure 1) and their relations with the design principles for tasks and for teacher actions.

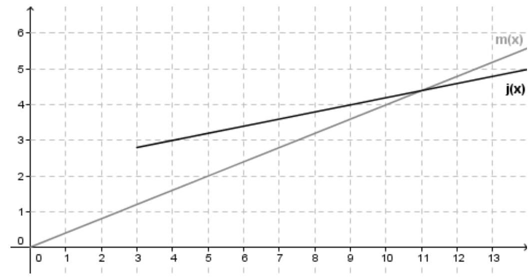
Data analysis is made with support from Nvivo software where video and audio records were categorized regarding teacher actions, mathematical reasoning processes, and design principles. The episodes presented in this paper are taken from lesson eight of the nine lessons that constitute the unit and aimed to lead students to relate equations and functions. These episodes are chosen from this lesson since they illustrate a variety of situations in which we identify reasoning processes and enable an analysis of the relations between design principles and teacher actions.

4 When functions precede equations: a grade 7 case

Taking into account the design principles, the task (Figure 2) includes as a first question an exercise, as students already had the tools to reach the solution, and two other exploratory questions that aim to be more challenging and lead students to advance their knowledge (principle (i)). Question 1 provides an opportunity for students to easily engage in the task, and also aims the discussion and review of some concepts and ideas regarding affine functions, namely, the possible meaning of x, $m(x)$ and $j(x)$, the needed information in a complete graph, and the meaning of the graph lines presented in relation to the possible domains of the functions. Questions 2 and 3 aim to lead students to generalize a procedure to figure out the intersection point of two functions and to generalize the relation between the solutions of an equation and the graphical representation of those two functions (principle (ii)). Question 2 allows the students to use different solving strategies, like trial and error or the sought procedure (principle (iv)). Question 2 also asks for a justification and an implicit justification is asked in question 3, as students are not expected to simply indicate the day in which the plants have the same height (principle (iii)). The design principles for the teacher actions, regarding both students' work and whole class discussions, are considered in the lesson plan and meant to be present throughout the lesson.

Mary received a plant as a gift and she kept a record of its growth. John thought it was a really nice idea and, a couple of days later, bought a plant and also kept a record of its growth. The functions that follow represent the height of both plants in their first days with the students:

Mary's plant: $m(x) = 0.4x$ John's plant: $j(x) = 0.2x + 2.2$



Observe the graph of these functions:

1. In which day do the plants have the same height?

2. Consider the comment: "Graphs are not necessary for us to know in which day the plants have the same height. Knowing the functions that represent the growth of each plant is enough to verify when they are equal". What would be another way to figure the day in which the plants have the same height? Justify your answer.

3. Catherine, Richard, and Ingrid did an identical register of the growth of their plants, which can be represented by the following functions:

Catherine's plant: $c(x) = 0.6x + 2$ Richard's plant: $r(x) = 2 + \frac{3}{5}x$

Ingrid's plant: $i(x) = 1 + 0.6x$

3.1. In which day Catherine's plant has the same height as Richard's plant? And as Ingrid's plant?

3.2. Consider your previous results. Which relationship can you establish between the graphs of functions *c* and *r*? And of function *c* and *i*?

Fig. 2 Proposed task.

Assuming generalizing and justifying as central processes of mathematical reasoning, this task aimed that students would (1) produce a generalization of an algebraic procedure to determine the *x*-intercept of any two functions, by equating the algebraic expressions of both functions and solving that equation, and (2) justify their responses and strategies. As students already know how to figure out the intersection point of two functions given in graphic representation, they are expected to achieve these two aims based on their knowledge about functions and equations, and based on the relations between these two mathematical concepts. This task led to several moments of whole class discussion, from which we present five episodes. The first episode concerns an initial discussion about questions 1 and 2, whereas the second addresses the strategy used in question 2. The third and fourth episodes concern the use of the procedure generalized in question 2 and interpreting the results with the lenses of question 3.2. The last episode addresses a justification that goes beyond the aim of the task.

4.1 Formulating a strategy

The episode. The teacher begins the lesson by introducing the task to the students and asks them to work on it. Some students immediately answer question 1, which leads to a first whole class discussion regarding the functions involved and their representations. Then, the students tackle the task in pairs. As they work, the teacher perceives that many have difficulty in dealing with question 2. She calls the students' attention and *invites* the class to engage in a whole class discussion, rephrasing the question without reducing its level of challenge (principle (a)):

If you had never seen the graphs and if you only had both algebraic expressions, this two [points both expressions], how would you… You have seen the graph and realized straight away that it was on the 11^{th} day, why?

The teacher *suggests* an interpretation to the statement of question 2, but she soon realizes that it would be better to begin with question 1 as the students had ease in solving it. She encourages sharing ideas (principle (d)), *challenging* students to justify an answer (principle (b)) that she knows the whole class achieved.

Iris tries to address this challenge:

Iris: Through the graph.

Teacher: Why through the graph?

Ruben: Because they get together.

Abel: Because it's there [pointing the point of intersection]!

Iris refers to the graph as a means to obtain the answer, but her *justification* is incomplete as she does not refer to the point of intersection. The teacher values her partial contribution by using her answer (principle (e)) and, asking why, she also *challenges* once more the students to go further on justifying this answer (principle (b)).

As the students refer to the point where both functions intersect, thus presenting the sought *justification*, the teacher *suggests* a more accurate form of saying it (principle (f)), thus validating this justification:

They intersect, isn't it? They touch each other here [pointing the point of intersection], that corresponds to number 11, OK.

Given the agreement on the response to question 1 and the validation of the explanation of "why", the teacher proceeds to the discussion of question 2. She *challenges* the students to come up with a strategy to solve the question (principle (d)). However, this challenge is not successful, as the students are still confused and keep silent, so she begins to *guide* them to formulate a strategy asking what the aim of the question is. Still, this guiding action is not enough to lead the students in formulating a strategy and the teacher goes further on *guiding*. Even so, this is still not enough as the students provide no answer.

Although these actions do not yield the sought students' participation, they open the path for them to present their ideas. Abel intervenes:

> Abel: I have 0.4*x* less 0.2.
>
> Teacher: 0.4*x*… Oh, but you are already solving what?
>
> Abel: The expressions.
>
> Teacher: Say it.
>
> Abel: 0.4*x* equals 0.2*x* plus 2.2.

At the beginning of his contribution, Abel does not answer the actual challenge posed by the teacher, but directly tackles question 2. The teacher encourages him in sharing his idea (principle (d)), *supporting* him to complete his contribution (principle (e)). This teacher action leads Abel to present the idea that one should equal one function to the other ($m(x) = j(x)$), identifying the aimed strategy to solve question 2.

This strategy entails the *generalization* of the sought procedure in this task. Thus, the procedure of equating the algebraic expressions of both functions is settled by Abel with respect to the functions *m(x)* and *j(x)* which allows the students to later use this procedure in any other set of two functions. However, as the procedure is not explicitly stated, the teacher *challenges* Abel by asking for a justification of his statement (principle (b)):

> Teacher: Why do we solve this? Why do I find what I want if I solve this?
>
> Abel: Because the result is 11.

Abel presents an invalid *justification*. By posing another question, the teacher *informs* that his statement is not enough as a justification (principle (c)) and *guides* the students towards a proper justification (principle (b)):

> Teacher: But why do we make [those algebraic expressions] equal?
> Mariana: To verify if it is equal.
> Teacher: To verify if they are equal?
> Abel: No, if they intersect.

Mariana provides an invalid *justification*, but, this time, by rephrasing her statement, the teacher *challenges* the students to validate her answer (principle (c)). At his point, Abel identifies that Mariana's statement is not valid, presenting a more accurate, although incomplete, *justification* about why one has to establish an equality between the two algebraic expressions.

Further analysis. In this discussion episode, the teacher perceives the students' difficulties in dealing with question 2. This leads her to rephrase the question in order to engage the students in it without reducing the level of challenge (principle (a)). Then, throughout the discussion, the teacher, either by challenging or supporting actions, leads the students to clarify and deconstruct incorrect or incomplete contributions (principle (e)) and provides encouragement to share ideas (principle (d)). Principle (b) is rather salient, as the teacher questions the students several times in order to lead them to explain "why". To tackle this principle, the teacher mostly relies on challenging actions. Nevertheless, when the students' justifications are incorrect or incomplete, she also tackles this principle with guiding actions. Regarding validating students' justifications (principle (c)), the teacher either validates or invalidates students' justifications by relying on informing actions, or asks students to do so by challenging them. In this last case, she also highlights the need for justification (principle (f)), suggesting it in a more accurate mathematical language. In this episode, the generalization of the sought procedure emerges due to Abel's strategy. This generalization, despite being unstated by either the students or the teacher, becomes more prominent as the teacher asks for a justification of Abel's strategy. Thus, in this episode, the students have several opportunities to justify that are prompted by the features of the task and by the teacher's actions based on the design principles, as well as by the students' responses to those actions.

4.2 Focusing on the procedure and triggering an unexpected generalization

The episode. The discussion goes on, aiming to highlight that the point where the two lines intersect is also the point in which the two expressions have the same value. When this discussion episode comes to an end, Tito intervenes, conjecturing, without solving the equation, that solving it would yield the same result as looking at the graph and finding the point where the lines intersect:

Teacher: Oh, it is the day, is the day in which Mary's plant height equals John's plant height. Isn't it? So, solve it to check if we looked properly to the graph.

Tito: But teacher… It will be 11.

At this point the teacher *challenges* the students to solve the equation all together, encouraging the sharing of ideas (principle (d)). She alternates between *guiding* and *supporting* actions, and with the participation of several students, the discussion entails the solution of the equation ($x = 11$).

Even though the strategy is established and verified by solving the equation, the teacher allows Tito to share his solving process (principle (d)):

Tito: I have done it by multiplying by 5 [referring to a step where Abel divided by 0.2 in $0.2x = 2.2$].

Abel: Which yields the same thing!

Tito: 0.2 times 5 is 1. . . That also leads to *x*. And then 2.2 times 5 also leads to 11.

Teacher: You multiplied both members by 5. Is this what you are saying?

Tito: Yes.

The teacher is not expecting Tito's solving strategy, so she *supports* the student's answer, asking for his confirmation (principle (e)). At this point, Abel quickly replies to Tito's statement. He does not refer to the particular result of 0.2 multiplied by 5 and of 0.2 divided by 0.2, Abel refers to a general situation, relying on the *generalization* that dividing by 0.2 or multiplying by 5 yields the same result for any given number.

In order to focus the class on this new strategy of solving the equation, the teacher *informs* the students about Tito's idea, and then she decides to go further (principle (g)), *challenging* the students to explain why this idea is pertinent (principle (b)), aiming on focusing on multiplication by 5 as equivalent to division by 0.2, as some students might not be aware of this generalization regarding the relationship between the two operations:

Teacher: Very well. Pay attention to what Tito is saying, that is a quite interesting alternative to division by 0.2. Tito is saying that when he gets to this step [$0.2x = 2.2$] instead of dividing by 0.2… Why did Tito make this decision?

Tito: I don't know, as I've seen a decimal, I thought that multiplying would be easier.

As the teacher realizes that the students do not have the tools to respond to her challenge, she reinforces Tito's idea, *suggesting* a clarification of the procedure that he followed (principle (e)). Also, she validates and highlights his procedure and then concludes synthesizing the strategy to answer question 2, using *suggesting* actions.

Further analysis. In this episode, the teacher seeks to further develop the discussion regarding the strategy to solve question 2, which is a central aim of this task. To do so, she mainly uses guiding actions while encouraging the students' participation (principle (d)). Despite the fact that the aim of question 2 was already achieved, the teacher supports the discussion of a different way of solving the equation proposed by Tito. By allowing the students to present their ideas and particularly by considering their partial contributions (principle (e)), an unexpected solving process and a consequent generalization emerge from the discussion. While tackling this unformulated generalization, the teacher also tries to engage the students in justifying it by using challenging actions that aim to obtain the explanation of why (principle (b)) and also to go beyond the task (principle (g)). However, she soon realizes that the students do not have the tools to respond to this challenge, withdraws it, and just summarizes the solution proposed. This episode also allows the students to focus on the procedure to be generalized in this task.

4.3 Using the generalization and interpreting results

The episode. After discussing questions 1 and 2, the students work autonomously on question 3. During this work, the teacher monitors the students mostly asking them to explain what they are doing, without reducing the level of challenge of the question (principle (a)). With the tools developed in the previous discussion, most of the students have ease on using the generalization that emerged on the discussion of question 2, writing equations by equating the expressions given in the statement of question 3. After the students' autonomous work, the teacher asks one of them to write the equations on the blackboard and *invites* the students to share their ideas about question 3 (principle (d)). Abel intervenes:

Abel: Every day [the height of plants] is going to come across each other.

Teacher: Explain it better, you're speaking in coded language.

Francisco: They are going to intersect each other.

The teacher reacts to Abel's contribution with a *challenging* action, aiming to go further on his use of the mathematical language (principle (e)). However, it is another student, Francisco, who responds to the challenge.

In this discussion, the teacher begins by letting the students share their ideas (principle (d)), but then, she feels the need to refocus the discussion on the procedure used to solve question 3.1. As the students, in their autonomous work, easily used in question 3.1 the generalization obtained in question 2, the teacher opts to *inform* the students about this procedure (principle (f)) and to *guide* them in validating the numerical equality obtained (principle (c)). By doing so, the teacher uses the limited time of the discussion to focus on making conclusions about the result of applying the procedure instead of focusing on the procedure itself. Thus, the teacher *guides* the students to draw a conclusion from that numerical equality, aiming to supplement their previous answers (principle (e)):

Teacher: And that leads us to conclude what?

Abel: That they are going to come across each other every day.

Abel's contribution provides the answer that the teacher wanted. However, the teacher *informs* the students validating this conclusion (principle (c)) and *challenges* them to go beyond the question (principle (g)), by asking the number of solutions of the equation:

Teacher: They intersect every single day, OK? How many solutions has this equation $[0.6x + 2 = 2 + \frac{3}{5}x]$?

Several students: Infinite.

Teacher: Infinite. That means that this plants, Richard's [plant] and Catherine's [plant] always were growing…

Abel: At the same height.

Teacher: Since the beginning that they have the same height.

The students easily respond to this challenge and the teacher *guides* them to establish a relation between the number of solutions and its meaning in this context, and she concludes by *informing* the students of the validity of this relationship (principle (c)).

At this moment, the teacher decides to skip the second part of question 3.1 and *challenges* the students to consider the first part of question 3.2, about the plants of Catherine and Richard, to establish a more significant relationship between those two aspects of the same situation:

Teacher: Graphically, this is… This [$c(x)$] is a line and this [$r(x)$] another line and graphically, how will those lines be?

Iris: Equal.

Teacher: Equal, what do you mean?

Iris: [Gesturing] In the same place.

Tito: Overlapping.

The students had already indicated that these two plants had the same height every day. Therefore, they easily realize how the graphs will be, needing only some *guidance* from the teacher in order to better communicate it (principle (e)). In doing so, students obtain a particular example that provides them the opportunity to later *generalize* that two functions that have an infinite number of intersection points are represented by coincident lines (which students, with some teacher guidance, generalize in the next lesson).

The teacher ends this discussion episode with a summary, *informing* the students about this particular example (principle (f)), representing what they discussed in GeoGebra and giving some extra information by *suggesting* that the graphs should be line segments and not straight lines.

Further analysis. The discussion about question 3 is structured mainly by guiding and challenging actions that consider or promote partial contributions from the students (principle (e)) followed by guiding or informing actions that highlight the validity of those contributions (principle (c)). This path of actions begins with an inviting action that encourages the students to participate in the discussion (principle (d)). Despite this central path, the teacher begins by highlighting the generalization of the sought procedure (principle (f)) relying on guiding and (mainly) on informing actions. Also, by challenging the students to go beyond question 3.1 and by connecting it to question 3.2 (principle (g)), she provides the students with the groundwork to later generalize that, if the procedure used in this task yields an infinite number of solutions, then the graphical representations of those functions coincide.

4.4 Using the procedure once more and interpreting further results

The episode. The discussion comes back to the second part of question 3.1 that aims to compare the height of the plants of Catherine and Ingrid. The beginning of this discussion is similar to that of episode 4.3, using mostly *informing* and *guiding* actions. When a student finishes solving the equation on the blackboard, the teacher *informs* the whole class by highlighting the result of this equation ($2 = 1$). However, Abel reacts stating that he achieved a different result ($0x = -1$). The teacher allows Abel to share his solving process (principle (d)) albeit *informing* that it leads to the same conclusion. She chooses to *guide* the students towards Abel's solving process, once again alternating between *guiding* and *informing* actions (principle (a)), leading the students to reach the expression $0 = -1$. Still, Abel is not satisfied with the arguments presented by his colleagues and by the teacher and claims that the two solutions are different:

Abel: But it is 0*x* straight away, teacher.

Teacher: Sure, because you did 0.6*x* minus 0.6*x*, 0*x*. Done. And you took 2 from the first member.

Abel: But my thing [$0x = -1$] is possible, this [$0 = -1$] isn't!

Faced with Abel's contribution, who keeps stating that this outcome is not the same as the former, the teacher *challenges* him to justify the validity of his statement (principle (b)) in order to address his misconception (principle (e)):

Teacher: Is yours possible?

Francisco: No it isn't.

Teacher: $0x$ equals –1?

Several students: No it is not [equal].

Abel does not respond to the teacher's challenge, but Francisco does, presenting an incomplete *justification*. Faced with a *guiding* question, several other students also respond with the same incomplete *justification*. Therefore, the teacher decides to *guide* the students in further justifying their answer (principle (b)):

Teacher: So, tell me, what's the value of x that transforms $0x$ in –1?

Francisco: Because zero times anything is always zero.

At this moment of the discussion Francisco properly *justifies* that Abel's equation is impossible to solve relying on known properties of numbers. Then the teacher focuses the students' attention on that justification by *informing* them (principles (c) and (f)) and she *challenges* Abel to re-evaluate his statement, which the student accurately does.

Similarly to the discussion of the previous situation of comparing the height of the plants of Catherine and Richard, the teacher *informs* that the equation is impossible and then she *challenges* the students to go beyond the question by identifying how many solutions this equation has (principle (g)). Also, following the same path as before, the teacher *challenges* the students to answer to the second part of question 3.2, *informing* the class about the ideas that emerge. Unlike what happened earlier, the students struggle to figure that the graphs of both functions are parallel, proposing, for example, non-parallel line segments that do not intersect. The discussion goes on until Iris presents another possibility for a graphical representation of both functions:

Iris: Teacher, they could be both like this [gestures two parallel straight lines]…

Teacher: They are going to be…

Vasco: Parallel.

As the teacher begins to *inform* the students about what Iris is trying to say, Vasco corroborates the idea of her colleague using a proper mathematical term. As in the previous discussion episode, the students gain some insights that may lead them to *generalize* that two functions with no points of intersection have parallel representations. At this moment of the lesson, the whole task had been discussed.

Further analysis. In the beginning of this episode, the teacher uses informing and guiding actions to engage the students (principle (d)) in solving the equation that might lead to the intersection of the two functions tackled. In doing so, by relying on guiding actions and using informing actions mostly to rephrase students' answers, she does not reduce the level of challenge of the task (principle (a)). Due to an unexpected statement from Abel, the teacher challenges and guides the students by asking for a justification and further alternative justifications (principles (b) and (e)), leading them towards an appropriate justification of Abel's invalid statement. In order to synthesize this justification (principle (f)), the teacher highlights its validity (principle (c)), with informing actions. When comparing the height of the plants of Catherine and Richard, she challenges the students to go beyond the procedure (principle (g)) by identifying the number of solutions of the equation, providing the students with the ideas that may lead them to generalize that if the equation does not yield any solution, then the tackled functions have parallel graphic representations.

4.5 Eliciting a further justification

The episode. Despite the fact that the aims of the task are already achieved, the teacher decides to *challenge* students to go further on their answers (principle (g)) by asking them to justify the parallelism between the lines representing these functions:

Teacher: Why do they have to be parallel?

Vasco: Because the plants of Catherine and Richard begin with 2 centimeters and then always grow [in the same way], and Ingrid's plant begins with 1 centimeter and grows in the same way.

Vasco refers to the growth of plants, *justifying* the parallelism with the slope of the functions. As this justification is not completely explicit, the teacher chooses to *guide* the students to present an alternative conclusion (principle (b)):

Teacher: And is there any other option for the straight lines not to intersect but to be parallel?

Several students: No.

Teacher: No, then, in a graph, we have this [presents the GeoGebra representation]. And I also want Vasco to share something really interesting that he noticed.

As the students easily answer to this guiding action from the teacher, she *informs* them that their conclusions are valid (principle (c)). Only then she *challenges* Vasco to explain his previous justification (principle (b)). He responds to the challenges in the following way:

Vasco: [Reading his answer] As Catherine's and Richard's [lines] begin with the same height and as both plants grow at the same rate, they are not going to intersect. Ingrid's, as it grows every day…

Teacher: They are not going to intersect?!

Vasco: Obviously, they are already overlapped.

The teacher had monitored Vasco's autonomous work, so, when the student states that the functions do not intersect, she reacts by *challenging* him to justify that statement (principle (b)). However, it was just a matter of what Vasco meant with "intersect", as he seems to be considering that this only occurs if the graphs of two functions have a few number of points in common. Complementing his previous contribution, Vasco *justifies* that as two functions have the same slope they have coincident representations, this time explicitly referring to the slope as he states "the same rate".

When Vasco *justifies* his statement regarding that the plants' height is not going to intercept, the teacher *informs* the class about that justification, validates it (principle (c)), and *guides* him to proceed:

Teacher: Oh, OK, they overlap. And the other two?

Vasco: Ingrid' plant, as it grows every day the same height than the other two and begins with less a centimeter… Is going to be always smaller.

Teacher: It will always be smaller, and that is why they never intersect. Exactly.

The procedure that Vasco used for the first two functions is adapted to the new conditions provided by the second two functions, which entails a *generalization* of the procedure that allows the student to relate the slope of the functions with their relative position. This discussion ends with another *informing* action from the teacher that summarizes the relation between the height of the plants of Catherine and Ingrid and their graphs. As the time was over, there was no opportunity in this lesson to discuss possible generalizations regarding the relationship between the relative position of the graphs of two functions, and, either the number of solutions of an equation that equals those functions, or the slope of those functions.

Further analysis. When the discussion of the task comes to an end, the teacher challenges the students by asking them to justify the parallelism between the graphs of those particular functions (principle (g)). Then, relying on guiding and informing actions, she asks for justifications (principle (b)) and indicates if students' justifications are valid or not (principle (c)) using informing actions. Also, the generalization in this episode differs from the ones envisioned in previous episodes as it relates to a procedure that consists of using the notion of slope in order to figure out the relative position of the lines that represent the functions, going beyond the scope of the task.

5 Discussion

The whole class discussion episodes that we presented illustrate the relations between design principles and students' reasoning processes. These episodes provide a variety of insights regarding teacher actions to stimulate generalizations and justifications. Regarding generalization, they highlight paths towards sought generalizations (episode 4.1), towards using or providing unexpected generalizations (episodes 4.2 and 4.5, respectively), or towards providing students with examples that might later be generalized (episodes 4.3 and 4.4). About justification, the episodes illustrate paths that provide the students with opportunities to justify and complete their justifications (episodes 4.1 and 4.4), to move from invalid to incomplete justifications (episode 4.1), to provide alternative justifications (episode 4.5), or paths where there is the need to withdraw the challenge as students do not have the tools to justify (episode 4.2).

Moreover, altogether, these whole class discussion episodes provide a general understanding regarding the design principles established and their relation to students' mathematical reasoning processes. Regarding the design principles for tasks, we note that the exploratory questions provided fertile ground for the students to use particular examples to make generalizations such as figuring a procedure to find where two functions intersect. This use of particular examples, as in previous studies (Kieran 2007), proved to be a fruitful setting for mathematical learning. The proposed task, designed in collaboration with the teacher, focused on promoting students' learning about linear equations by making sense of mathematical properties. Despite that most of the students' generalizations and justifications emerged from the discussion and not directly from the task, all the situations in the whole class discussion that we analyzed were prompted by the task.

Regarding the design principles for teacher actions, all of them appear to be relevant to enhance students' mathematical reasoning. Moreover, particular design principles combined with more general teacher actions seem to lead to students' generalizations and justifications. As highlighted in previous studies (Franke et al. 1999; Kosko et al. 2014), a single action is not enough to promote situations that elicit mathematical reasoning processes. There is the need to focus on sequencing of actions. The framework to analyze teacher actions that distinguish between inviting, informing/suggesting, guiding/supporting, and challenging actions (Ponte and Quaresma 2016) is useful to understand the paths of actions, and supported the reframing of the design principles. A principle that is most noticeable in the discussion is asking to explain the "why" or to present an alternative justification, but by itself may not lead to a justification. However, as illustrated in this paper, if this "why" question (which is usually a challenging action) is followed by guiding actions, some justifications are likely to emerge, either valid or invalid. Often, a teacher's action within this principle is followed by an action related to validating a statement, where the teacher tends to do informing actions and rarely uses challenging actions. Challenging actions also seem to have the potential to engage the students in justifying. Within similar situations or even in the same ones, the principle related to highlighting generalizations and justifications was enacted. Regarding generalization, beginning by inviting students and also by challenging or guiding them to participate, focusing on encouraging the students to share their ideas, may elicit unexpected generalizations. Also, challenging students to go beyond the task, usually through a central challenging action, followed by guiding and informing actions, leads the students to generalize. Thus, in designing an intervention that aims to develop students' mathematical reasoning, a combination of design principles seems to be useful, as isolated principles might not be enough to achieve such aim.

6. Conclusion

This study provides insights into how reasoning processes may emerge in whole class discussions carried out in a challenging learning environment. First, there is a major relevance of the structure of the intervention itself. Here, the teacher strong engagement is essential to overcome what Kosko et al. (2014) identified as a stark contrast between what researchers and teachers value as the actions more effective in promoting students' mathematical reasoning. Second, the whole class discussion itself presented the students with opportunities to enhance their reasoning processes, a central aspect of an environment that allows them to make sense of mathematics (Brodie, 2010). And third, within this environment, these reasoning processes tend to emerge if some action paths are followed by the teacher. When aiming to enhance students' mathematical reasoning, a central challenging action may elicit a generalization or a justification, but most often it requires several follow-up actions from the teacher.

A further study that will be interesting to undertake may address what new steps may be taken to make proofs come to life in the mathematics classroom. Moving from generalizations and justifications to proofs is not immediate either to the students or the teacher. In fact, a single intervention such as this is not enough to provide the students all the tools necessary to develop and understand proof (Jahnke and Wambach, 2013). Also, as highlighted by Stylianides (2007), teachers need guidance and resources in order to be able to cultivate proof and proving among their students. As a first step, as referred by Brodie (2010), it is important to share interventions regarding mathematical reasoning and what those interventions may achieve. In the current intervention, the set of presented principles constitutes a promising environment to develop students' ability to make appropriate generalizations and justifications. And, by generalizing and justifying, students develop their mathematical reasoning and can be better equipped to later deal with mathematical proof.

Acknowledgments

This work is supported by national funds through FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia by a grant to Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

References

Becker, J.R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th PME Conference* (vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: NCTM.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v-vii). New York, NY: Springer.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York, NY: Springer.

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students’ reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, doi:10.1007/s10649-005-2532-y

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, doi: 10.1007/s11858-007-0067-7

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, doi:10.3102/0013189X032001009.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer.

Francisco, J.M., & Maher, C.A. (2011). Teachers attending to students’ mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, doi:10.1007/s10857-010-9144-x.

Franke, M.L., Webb, N., Chan, A., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education*, doi:10.1177/0022487109339906

Jahnke, H.N., & Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM Mathematics Education*, doi:10.1007/s11858-013-0502-x

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.

Kosko, K., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal,* doi:10.1007/s13394-013-0116-1

Krussel, L., Edwards, B., & Springer, G.T. (2004). The teacher's discourse moves: A framework for analyzing discourse in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics,* doi:10.1111/j.1949-8594.2004.tb18249.x

Lannin, J., Ellis A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, doi:10.1007/s10649-016-9681-z

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, *15*(4), 213-221.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* doi:10.1007/BF00315610

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education,* doi:10.1023/A:1020134209073

Stein, M.K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning,* doi:10.1080/10986060802229675

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Educatio*n, *30*(2), 171-191.

Anexo 4

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018b). Teacher's actions to promote students' justification. *Acta Scientiae*, *20*(3), 487-505.

Versão dos autores

Teacher's Actions to Promote Students' Justifications

Joana Mata-Pereira

João Pedro da Ponte

ABSTRACT
Justification is a mathematical reasoning process that relies on concepts, properties or mathematical ideas and, in certain situations, particular cases, being a fundamental part of the proof. The teacher needs to promote justification in the classroom, as it is essential to the development of students' mathematical knowledge. This study aims to understand how a set of design principles regarding tasks and teacher's actions contributes to enhance students' justifications in whole-class mathematical discussions and to understand what kinds of justifications emerge in those discussions. The intervention, part of a design-based research, occurs in a grade 7 class of an experienced teacher, in nine classes about linear equations. The data collection includes classroom observations (video and audio recorded) and a logbook. Data analysis considers a set of design principles, a conceptual framework for teacher actions, and a conceptual framework for student justifications. The results show that certain sequences of teacher actions based on the design principles allow students to present quite complete justifications based on logical coherence and mathematical aspects of the situation.
Keywords: Mathematical reasoning. Justification. Teacher's actions. Design-based research

Ações do Professor para Promover Justificações dos Alunos

RESUMO
A justificação é um processo de raciocínio que se baseia em conceitos, propriedades ou ideias matemáticas e, em algumas situações, em casos particulares, sendo um elemento fundamental da demonstração. O professor deve promover a justificação na sala de aula pois esta é essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Este estudo tem por objetivo compreender de que modo um conjunto de princípios de design referentes a tarefas e ações do professor contribui para promover as justificações dos alunos em momentos de discussão coletiva e compreender que tipos de justificação surgem dessas discussões. A intervenção, parte de uma investigação baseada em design, ocorre numa turma de 7.º ano de uma professora experiente, em nove aulas sobre equações lineares. A recolha de dados decorre de observações de sala de aula (vídeo e áudio gravados) e de um diário de bordo. A análise de dados considera um conjunto de princípios de design, um quadro conceptual referente às ações do professor e um quadro conceptual referente às justificações dos alunos. Os resultados mostram que determinadas sequências de ações do professor que se baseiam nos princípios de design permitem aos alunos apresentar justificações bastante completas baseadas na coerência lógica e em aspetos matemáticos da situação.
Palavras-chave: Raciocínio matemático. Justificação. Ações do professor. Investigação baseada em design.

Mathematical reasoning and mathematical proof are fundamental aspects of mathematics. Justification is structural to proof and proving and, hence, is essential to the development of students' mathematical knowledge. Among other mathematical reasoning processes, justifying allows students to envision mathematics as a logical, inter-related and coherent subject. For instance, justifying procedures can help students overcome using them with none or little understanding. With Brousseau and Gibel (2005), we consider mathematical reasoning as making justified inferences, that is, using known mathematical information to obtain new information. This may be done inductively, deductively or abductively (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; Pólya, 1954; Rivera & Becker, 2009). Justifying is, thus, part of the mathematical reasoning that also involves processes as formulating questions and solving strategies, and formulating and testing generalizations and other conjectures (Lannin et al., 2011).

To promote students' mathematical reasoning in the classroom demands the establishment of challenging learning environments that go beyond proposing exercises to solve with well-known procedures. Thus, understanding how teachers can organize those learning environments is essential to promote students' mathematical reasoning. Aiming to understand how teachers can help students to engage in mathematical reasoning, we carried a design-based research (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016). This research addresses mathematical whole-class discussions, unleashed by exploratory tasks, as privileged moments to promote students' mathematical reasoning. Focusing on justification, this article aims to understand how a set of design principles regarding tasks and teacher's actions promote students' justifications in whole-class mathematical discussions and to understand what kinds of justifications emerge in those discussions.

Students' justifications

In the classroom, justifying is a process that rarely emerges spontaneously. Frequently, students accept as valid conjectures and generalizations, without feeling any need to test or justify them (Harel & Sowder, 2007). In addition, in several scenarios, students focus mainly on what is familiar or on ideas that they recall, focusing little or no attention in the mathematical properties or concepts involved (Lithner, 2008). However, justification is a mathematical process fundamental for students' mathematical learning. Justification leads students to make connections among mathematical concepts, representations and procedures, to present arguments to support claims and conjectures, to solve problems, and to develop new mathematical ideas (Brodie, 2010). In order to justify mathematically, students produce statements to convince themselves and others that a claim is true or false (Harel & Rabin, 2010), but the assumptions of such statements need to be of mathematical nature. Justification is a means to sustain claims based on mathematical properties, procedures and ideas (Lannin et al., 2011). As Lannin et al. (2011) indicate, in some situations, justifications based on particular cases can be an important stage when students do not have the tools to justify in a deductive way. As involving students in formal justifications too early in their schooling might not be suitable to their developmental level (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014), teachers can consider students' empirical justifications as acceptable according to their knowledge. Moreover, justifications based in particular cases that aim to represent a broader class of mathematical objects (Sowder & Harel, 1998), may be regarded as proper justifications according to the knowledge of the class. However, teachers should discuss with students the mathematical validity of such justifications, as students' empirical explorations are not equivalent or a substitute for mathematical proofs (Stylianides & Stylianides, 2009).

Despite the goal of having students' justifying based on mathematical assumptions, not all justifications that emerge in the classroom are of a purely mathematical nature. In fact, justifications can occur at different levels of formality and complexity. In addition, a student's justification, at any level of formality or complexity, may be correct, partially correct or incorrect. It is essential that students understand what validates a justification and that they reject justifications based on authority, perception or common sense (Lannin et al., 2011).

By being a broad concept, justification, comprises classifications of various kinds and different grain sizes. A lens to provide an understanding of students' justifications regards its formality and complexity levels (Figure 1). Brousseau and Gibel (2005) propose three different levels regarding the formality of a justification: Level A – a justification that is not formally presented, but that can be associated with student's actions as a model of his/her action; Level B – a formal justification, however incomplete or with inferences based only implicitly in elements of the situation or in what is considered as shared knowledge; Level C – a formal justification based in a sequence of related inferences, with explicit reference to the situation or what is considered as shared knowledge. The concept of formal justification referred to in these three levels concerns what is considered to be formal in a concrete situation, namely according to students' grade level and their knowledge which is not necessarily the usual mathematical idea of formal justification regarding mathematical proof

(Stylianides, 2007). As students advance in their schooling, formal justifications should progressively be more formal from a mathematical standpoint, often becoming equivalent to proof or significant parts of proofs.

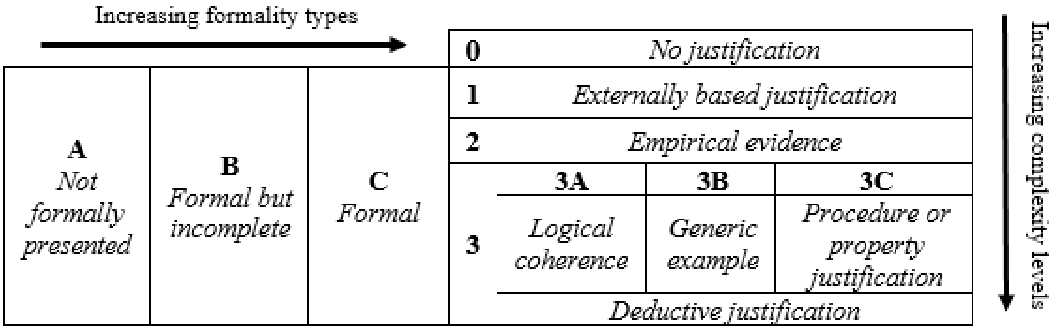


Figure 1. Justification levels of formality and complexity

The work of Balacheff (1988), Sowder and Harel (1998), Lannin (2005) and Carraher, Martinez e Schliemann (2008) on the classification of justifications may be summarized by considering four different increasing levels of complexity: Level 0 – *no justification*, if students' answers do not include a justification; Level 1 – *externally based justification*, if students' justifications rely on someone else or in reference materials; Level 2 – *empirical evidence*, if a justification is based on particular examples; Level 3 – *deductive justification*, if a justification has a deductive nature. Within Level 3 justifications, it is possible to distinguish among: Level 3A – *logical coherence*, if a justification is based on logical principles; Level 3B – *generic example*, if a justification is deductive, but stated regarding a particular example; and Level 3C– *procedure or property justification*, if a justification is based on deductive arguments that are independent of particular cases or examples. Levels 3A, 3B and 3C are varieties of deductive justifications, all the same level of complexity.

Level 1 justifications, based on external sources, can be based on authority or rituals or can be symbolic (Sowder & Harel, 1998). In a justification based on authority, a student relies on a textbook, in a teacher statement or even in a more knowledgeable student. A justification based on rituals occurs when students regard only the structure of the argument and not its content. An example is a justification based on a well-known procedure, such as the division algorithm. A justification based on symbolic processes is the one that might lead students to consider mathematical symbols as independent from any meaning or relation with a specific situation. In this justification, students can write, for instance, $4x + 2 = 6$ as equivalent to $4x = 6 - 2 = 4: 4 = 1$.

Regarding justifications based on empirical evidence (Level 2), it is possible to consider perceptual justifications, justifications based on examples (Sowder & Harel, 1998) and justifications based on crucial examples (Balacheff, 1988). Perceptual justifications are based on a perception of the situation, often based on diagrams or drawings. Justifications based on examples rely on particular cases of a situation. Balacheff (1988) designates these justifications as naïve empiricism and considers them as an obstacle to generalization. With these justifications, students often validate a mathematical generalization on the basis of a single naïve experiment (Stylianides & Stylianides, 2009) or state a generalization by justifying that it works for all the cases they tested (Knuth, Chopin, & Bieda, 2009). In justifications based on crucial examples, examples are selected attending to the hypothesis that is settled, the strategy of choosing examples aims to obtain a clearly distinct result that leads to exclude all the hypothesis but one (Balacheff, 1988). In these justifications, a crucial experiment may validate a generalization (Stylianides & Stylianides, 2009) that is settled by the characteristics or the known facts of the situation.

Deductive justifications (Level 3) are either non-empirical or consider an example not as a particular case, but as a representative of a class of objects. Justifications of this level of complexity are often part of a proof and proving and can be subdivided into three distinct levels mentioned above as levels 3A, 3B and 3C. Presenting justifications at level 3 can be a signal of recognizing empirical arguments as insecure methods for validating a mathematical statement (Stylianides & Stylianides, 2009).

Justifications based on logical coherence (Level 3A), also denominated analytical justifications of axiomatic nature (Sowder & Harel, 1998), consider mathematics as a body of knowledge that may be organized in a way that new results are logical consequences of previous results. These justifications are based on logical principles rather than mathematical computations (Schliemann et al., 2003). Generic example justifications (Level 3B), also referred as analytical justifications of transformational nature (Sowder & Harel, 1998), focus on general aspects of a particular situation and may involve other reasoning processes as a generalization. Procedure or property justifications (Level 3C), aim to make explicit why a statement is valid, either by operations or transformations of an object that is considered as a representative of a class of objects (Balacheff, 1988), or by relying on mathematical properties, definitions, assumptions and theorems (Bergqvist, 2005).

Tasks and teacher's actions that enhance justification

Students learn mathematical reasoning by reasoning and by analyzing their and others' mathematical reasoning (Ponte & Sousa, 2010). Therefore, it is necessary to promote situations that require students to justify their answers. When the students are explicitly engaged in presenting justifications, they develop a broader understanding of the mathematical aspects of the situations (Kosko, Rougee, & Herbst, 2014). Moreover, probing the students for justification stimulates them to re-examine their solving processes and to offer more adequate justifications (Martino & Maher, 1999).

A central aspect to enhance students' justifications is to propose suitable mathematical tasks. Therefore, it is important to understand the nature of tasks, how the students get involved in those tasks and the interactions that may emerge in the classroom (Brodie, 2010). Different research studies (e.g., Francisco & Maher, 2011) highlight problems and exploratory tasks as particularly indicated to enhance students' mathematical reasoning. However, it is not mandatory or desirable that all tasks include highly challenging questions (Brodie, 2010). Too many challenging questions might be unsuitable due to time limitations and lead students to lose their interest. The structure and level of challenge of a task must consider the students who will solve it. However, by themselves, tasks are not enough to develop students' mathematical reasoning. Teacher's actions are equally central to engage students in situations that enhance their mathematical reasoning processes, such as justification.

An important moment to support the development of students' justifications are whole-class discussions in which the teacher prompts students to share their thoughts. In these discussions, the teacher questions the students to describe or explain their mathematical reasoning, leading them to understand the mathematics involved (Kosko, Rougee, & Herbst, 2014). A model to analyze teacher's actions in whole-class discussions is proposed by Ponte, Mata-Pereira and Quaresma (2013) (Figure 2). This model considers actions related to mathematical processes such as justifications, namely, inviting actions, informing/suggesting actions, supporting/guiding actions and challenging actions as well as actions related to classroom management.

Inviting actions initiate a whole class discussion or a segment of discussion, with the teacher prompting the students to participate and share their solving processes. During the discussion, the teacher calls upon the other three kinds of actions that are central to support students' learning. With informing/suggesting actions, the teacher makes information available to the students or validates their statements, while with supporting/guiding actions the teacher leads the students to explain their thinking or to move forward in their thinking. With challenging actions, the students are encouraged to go beyond the knowledge previously presented. In these three kinds of actions central in whole-class discussions, Ponte et al. (2013) also consider different mathematical processes that are involved, not necessarily disjoint: (i) representing, that includes providing, using or changing a representation, revoicing, and making procedures, (ii) interpreting, that includes giving meaning to the wording of a question or of an idea and making connections, (iii) reasoning, that includes raising questions about a statement or a justification, generalize a procedure, a concept or a property, justify and present arguments, and (iv) evaluating, a method or solving process and comparing different methods. This model relates teacher's actions while conducting whole-class discussions with the mathematical processes involved. Despite being part of the reasoning, justifying is often associated with all the other mathematical processes considered in this model.

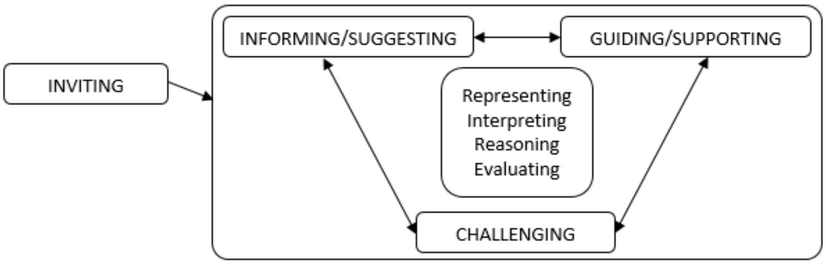


Figure 2. Teacher's actions in the whole-class discussion (adapted from Ponte et al., 2013)

Regarding teacher's specific actions that enhance justification, Bell (2011) suggests that the teacher should help the students to give meaning to justifications, ask for alternative justifications, emphasize what validates a justification and lead the students to explain "why". In addition, it is relevant that the teacher encourages the students to share ideas and reasoning, and look forward to consider students' invalid or partial contributions and broaden valid contributions (Brodie, 2010). Harel and Rabin (2010) highlight also actions that aim to enhance justifications that are not supported by authority leading students to discuss and solve disagreements, namely, evaluating students' mathematical reasoning or asking them to evaluate their colleagues' reasoning, and presenting deductive justifications to students.

Research Methodology

Research design and design principles. The research reported in this article is part of a broader design-based research (Cobb et al., 2016) that aims to develop a local theory about how to enhance students' mathematical reasoning in the classroom. In this research, a set of design principles, i.e., heuristics that structure an intervention, are defined with a particular focus on tasks and teachers' actions to enhance students' mathematical reasoning. Such design principles were refined considering the continued literature review and the previous cycles of intervention. Defining design principles, besides structuring the intervention, brings together the often-contrasting understandings of what is considered by teachers and by researchers as being students' mathematical reasoning and the ways to enhance it (Kosko, Rougee, & Herbst, 2014).

This article concerns the third cycle of intervention on linear equations, after a first cycle with lessons about sequences and a second cycle addressing linear equations. We focus on the design principles that directly relate to students' justifications. Regarding task design, a principle states that tasks should include questions that ask for justifications of answers or of solving processes. Regarding teacher's actions, the design principles state that the teacher should propose situations that lead students to (a) justify and present alternative justifications; (b) identify valid and invalid justifications, indicating why; and (c) share ideas, namely considering and valuing invalid or partially valid contributions, deconstructing, complementing or clarifying them.

Intervention and participants. The third cycle of intervention included nine lessons in a grade 7 class with 27 students. A detailed plan of each lesson was prepared attending to the design principles, namely with tasks designed to enhance students' mathematical reasoning and considering possible teacher actions. Each lesson plan was proposed by the first author and discussed in detail with the teacher, who made all the changes and adjustments she deemed necessary, taking into account the characteristics of the class and the available means. We invited the participant teacher given her experience and her availability to consider changes in her practice. All participants in the study (teacher and students) are volunteers, were informed about the characteristics of the research, agreed to participate and their anonymity is assured by the use of fictitious names.

Data collection and analysis. We present illustrative episodes of justifications of different kinds that emerge in whole-class discussions. The lessons of such episodes were directly observed, video and audio recorded, and led to written field notes. Data analysis focuses on the justification-related design principles about tasks and teacher's actions in whole-class discussions based on the presented model (Figure 2) and also on students' justifications regarding levels of formality and complexity (Figure 1). In the next section, we present several situations by describing the tasks that prompted the whole-class discussions and the context in which such tasks were proposed to students, and then illustrate and analyze whole-class discussion episodes.

Using mathematical properties to justify

Task and context. The task that prompt the whole-class discussion reported in this segment aimed to introduce the process of solving equations based on the addition principle of equality. This task was proposed to the class to be solved collectively and its first question required to convert into symbolic language an equation represented in a twin-pan balance with sugar packages and weights (Figure 3). To this particular question, the lesson plan did not foresee a particular justification but indicated that the whole-class discussion should consider the design principles formulated in the intervention design.

Translate into symbolic mathematical language the following situation:

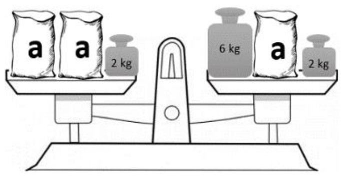


Figure 3. The first question of twin-pan balance task.

This task was proposed in the second lesson of the intervention. The first lesson addressed the concepts of equation, members and terms of an equation, and solution of an equation. It also considered the process to verify if a certain value is or is not the solution of an equation.

Justification based on mathematical properties. The teacher begins the whole-class discussion by briefly presenting the task and the aim of the stated question. After this presentation, the students begin to answer and the second student that participates in the discussion presents the sought answer:

Gustavo: 2 *a* plus 2 equals… 6 plus *a* plus 2.

The teacher registers the equation $2a + 2 = 6 + a + 2$ in the whiteboard and encourages the students to present alternative answers (principle (c)):

Daniel: I wrote 6 plus 2 plus *a*.

Teacher: 6 plus 2 plus *a*.

Gustavo: Or 8 plus *a*.

Teacher: Or 8 plus *a*. Isn't it? It could be. Would someone translate differently?

Several students: No.

Gustavo: No, only changing the order.

As the students share these ideas, the teacher focuses on ordering terms, *challenging* the students to justify the possibility of changing the order of terms (principle (a)):

Teacher: Right, but does it make any difference?

Several students: No.

Teacher: Why is it irrelevant to change the order?

Gustavo: Because *a* is always the only [unknown] value…

The justification provided by Gustavo to the teacher's challenge is invalid, as it is based on characteristics of that particular situation (level 2 justification). In addition, this justification is not formally presented (type A justification) as the student does not use the proper terms to refer to the unknown value. Still, the teacher values Gustavo's participation (principle (c)), implicitly *informs* the students about the validity of the justification (principle (b)) and *challenges* the students to enrich the justification (principle (a)):

Teacher: More than that.

Leonardo: Because it is an addition and it is a property of addition.

Addressing the teacher's challenge, Leonardo justifies the possibility of changing the order with a statement regarding the properties of addition (level 3C justification). This justification is presented in a rather formal way, despite being incomplete (type B justification). However, it can be improved; the teacher *guides* the students aiming to complete the justification (principle (c)):

Teacher: That is…? What is its name?

Several students: Commutative property.

Teacher: Commutative. Commutative property, so we can change the order of the terms, it will be the same. That's it, it's true.

In view of students' answer, the justification is recognized as valid, being based on mathematical properties independent of the particular situation under discussion (level 3C justification) and properly stated (type C justification). As such, the teacher decided to finish this whole class discussion moment by *informing* the students of the obtained conclusion (principle (c)) and validating it (principle (b)).

In this episode, a challenging action enhances an invalid and not formally presented justification. Based on the teacher's informing and challenging actions, the students enrich it providing a valid but incomplete justification. The teacher's guiding actions allow the students to complete the justification and to present it formally, by referring to mathematical properties. As such, a path of challenging, informing, challenging and guiding actions allows students to justify properly. Also, this process of completing and formalizing a justification arises when the teacher's actions focus on enhancing such justification and on valuing invalid and incomplete justifications.

Justifications that do not justify

Task and context. By the end of the second lesson, the teacher recommended the students as homework to solve several equations using the addition principle of equality. The teacher expected the students to justify the solving process based on the addition principle of equality. At the beginning of the third lesson, there was a whole class discussion moment about solving some of the equations. The following episode concerns the solving process of the equation presented in Figure 4.

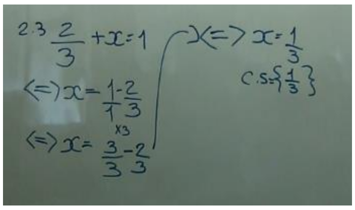


Figure 4. Solving process of Daniel.

No justification and justification based on authority. Daniel solved the equation on the whiteboard, and afterwards, the teacher *invites* the students to share questions or suggestions. Tomás intervenes presenting an alternative solving process:

Tomás: What I have done... Instead of writing three thirds minus two thirds, I wrote two thirds minus three thirds.

Following this contribution, the teacher *challenges* the students to validate this solving process by asking them to identify which processes are wrong, Daniel's or Tomás' (principle (c)):

Teacher: And which one is right? Where's the error? Here [on the whiteboard] or there [in Tomás' solving process]?

Tomás: Here [on my solving process].

Teacher: Why?

Tomás: Because I swapped it.

Tomás himself answers the teacher's challenge, and the teacher moves forward with another *challenging* action, asking for a justification (principle (a)). However, Tomás does not present a justification (level 0 justification), stating solely the procedure that he used to solve the equation. As such, the teacher *guides* the students in order to achieve the sought justification (principles (a) and (c)):

Teacher: But why… Why is it wrong to exchange? . . .

Ricardo: You [teacher] said that over there [on the whiteboard] it was right.

Tomás is once again unable to justify, and Ricardo justifies based on authority (level 1 justification, type A justification), albeit the teacher had not explicitly stated that Daniel's solving process on the whiteboard was correct. Attending to students' difficulties to justify, the teacher provides *information* regarding the use of the inverse operation that allows the students to move forward:

Teacher: What exchanges… To the inverse operation?

Daniel: It was just two thirds or *x* . . .

Teacher: The question is, how do I know if a term is going to change its operation or not?

Leonardo: If we change members.

Adding to the statement of the teacher, Leonardo's answer completes the sought justification. This justification, based on addition principle of equality, and thus, on mathematical ideas, is based on arguments independent of the particular case under discussion (level 3C justification), despite being a rather informal statement (type B justification). However, this justification is complemented by the teacher with *information* regarding its application in this particular case (level 3B justification) and subsequent *information* to reinforce and formally present the justification that had been completed by Leonardo (level 3C justification, type C justification):

Teacher: If we change members, the operation changes to the inverse operation . . . The ones that don't change members, stay exactly as they were. Let's check . . . So, 1 has to continue 1. . . What changed member? The two thirds, it was adding and changed to subtracting, because it changed member. Therefore, the terms that stay in the same member where they were, those stay the same, don't change a thing. . . The terms that change member are the ones that have to change to the inverse operation.

In this segment of the discussion, the first challenging action from the teacher leads to no justification and a subsequent guiding action leads to an invalid justification, based on authority. Due to the students' difficulties in achieving the sought justification, the teacher's actions rely on informing students of relevant ideas to the justification. Such informing action provides the students with the tools to justify based on mathematical ideas, albeit without the expected formality. As the students have difficulties in achieving the justification, the teacher's actions also consider informing actions to clarify the justification. Due to students' difficulties, in this segment, the sequence of actions has an emphasis on guiding and informing, with the overall path of actions including challenging, guiding, and two sets of informing actions. To formally present the justification and clarify it, the teacher began by switching between justification levels, and formalize the justification by revoicing students' justification.

Using previous knowledge to justify

Task and context. Both episodes presented in this section focus on a part of a task that was proposed on the eighth lesson of the intervention. This segment of the task (Figure 5) aims to lead students to establish a procedure to figure out the intersection point of two functions. This class had previously studied linear functions, considering both algebraic and geometric representations

Francisca received a plant as a gift, and she kept a record of its growth. Santiago thought it was a really nice idea and, in the very same day, bought a plant and also kept a record of its growth. The functions that follow represent the height of both plants in their first days with the students:

Francisca's plant: $f(x)=0.4x$ Santiago's plant: $s(x)=0.2x+2.2$

1. Graphically represent functions f and s.

2. Based on the analysis of the previous graphic representations, identify in which day do the plants have the same height.

3. Consider the comment: "Graphs are not necessary for us to know in which day the plants have the same height. Knowing the functions that represent the growth of each plant is enough to verify when they are equal". What would be another way to figure the day in which the plants have the same height? Justify your answer.

Figure 5. Proposed task regarding functions and equations.

In the first two questions, the students are expected to use GeoGebra app, as the school is equipped with iPads and they have used it already in the past. Regarding design principles about the task, question 3 explicitly asks for a justification.

Justification based on knowledge about functions. At the beginning of the lesson, the teacher asks the students to read the questions and clarifies the aims of the task and the tools to use. Afterwards, the students work autonomously on the task, in pairs, for a couple of minutes. After inserting the algebraic expression in GeoGebra, some students state that the plants have the same height in the eleventh day. The teacher begins the discussion asking students to justify such statement:

Teacher: How did you realize that it was on the eleventh day? Isa.

Isa: Because, if we look closely, both lines intersect on eleven.

The teacher's *challenge* to justify (principle (a)) leads Isa to justify her answer to question 2 on the basis of her prior knowledge about functions. This justification is incomplete with regard to the statement "on eleven", however, it refers to elements of the situation, namely the graphic representation of both functions and the point of intersection. Thus, Isa presents a generic justification given the available data (level 3B justification), despite lacking the proper formality (type B justification).

In order to complete Isa's answer (principle (c)), the teacher *guides* students, revoicing Isa's answer and leading to a more precise justification:

Teacher: On eleven…

Isa: On point eleven.

Teacher: On point eleven?

Gabriel: Abscissa.

Teacher: On the point with abscissa eleven.

By referring parts of students' answers, the teacher is implicitly informing students about what is missing in the justification (principle (b)), and, based on student responses, she highlights what completes it (principles (b) and (c)).

After validating Isa's response, the teacher goes further in the justification, *challenging* the students to come up with another justification (principle (a)):

Teacher: And why is it, Isa and not only, why am I going to read the intersection on the x-axis? Why am I going to look for the value on the x-axis?

Isa: Because x-axis the axis of objects…

Teacher: Right… And how do I know if I am looking for an object or an image?

Isa's justification is based on mathematical concepts (type B justification); however, her statement is not sufficient as a justification in this particular situation since it is not related to the context of the problem (invalid level 3C justification), being an invalid justification. Once again, the teacher validates the student's partial contribution and encourages the students to complete this contribution (principles (b) and (c)), *guiding* them. Another student tries to justify but does not add information to what Isa said earlier. At that moment, Gabriel participates in the discussion:

Gabriel: I think it's because the height is in ... In ... I forgot the name.

Teacher: In the axis…

Gabriel: Of the ordinate, in the axis of the ordinates and the days are in the abscissa.

At this point in the discussion, Gabriel adds information relevant to the justification by relating objects and images of these functions to the context of the situation (level 3B justification), supported by the presentation of a small *suggestion* by the teacher. Despite the relevant relationship that has been added, the justification remains incomplete, and teacher continues to *guide* students to justify (principle (c)):

Teacher: What do functions *s* and *f* represent?

Several students: The height.

Teacher: The height of the plant, right? In function of what?

Several students: The time.

Teacher: The time that elapses. The time that elapses in days. OK, very well, 11.

This *information* given by the teacher leads the students to easily identify the dependent and independent variables, thus completing the intended justification (level 3B justification, type C justification).

As in previous episodes, the teacher's first action is a challenging action to justify. In this episode, this first action leads to an incomplete justification that is completed based on guiding actions. In order to achieve a more accurate justification based on students' previous knowledge, the teacher also uses informing actions and a challenging action to go further in justifying. This last action leads to another sequence of moving between guiding and suggesting actions aiming to complete and formalize the sought justification. As such, the path of actions considers challenging, guiding, informing, challenging, guiding and suggesting actions.

Justification based on knowledge about equations. After the discussion of question 2, the teacher introduces question 3. At this point in the discussion, a student immediately proposes a strategy to solve the question. This leads the students to engage immediately in a new segment of whole-class discussion:

Santiago: So, teacher, we have that thing that was G.C.D...

Santiago brings to the discussion a strategy based on a mathematical concept that would not be expected in this situation. Although it seems an idea with little meaning, the teacher *informs* the class of the idea of Santiago and lets him continue his explanation (principle (c)):

Teacher: Greatest common divisor?

Santiago: Yes, something like that. Can't we use it to answer to when they intersect? . . . I can't recall it, but wasn't there something in common? Doing each number and then…

By allowing Santiago to justify his statement, it is possible to understand that, although incorrect and not formally presented (type A justification), this justification is based on an idea with some logical coherence (level 3A justification). Effectively, both in the greatest common divisor and in the intersection of functions what is sought is "something in common", as the student refers. At this point, the teacher poses more questions in order to deconstruct the student's perception of G.C.D., which leads other students to identify Santiago's strategy as inappropriate for the situation.

After this clarification, Clara presents her strategy:

Clara: We can use an equation (referring to $0.4x=0.2x+2.2$), and the number that we get is the day they have [the same height]. . .

Teacher: What are you expecting as a solution of this equation?

Several students: 11.

Teacher: 11. So, confirm that.

In retaking the information obtained in the previous questions, the teacher *supports* Clara's strategy of solving this equation and, by *challenging* the students to confirm the result, she leads them to justify (principle (a)) that 11 is the solution of the equation. The students solve this equation in an autonomous work, and Daniel intervenes:

Daniel: Teacher, it isn't.

Teacher: It isn't? So, solve the equation over there (on the whiteboard).

By *inviting* the student to solve the equation in the whiteboard, the teacher realizes that the student only forgot x in one of the steps and, in *guiding* his solving process (principle (b) and (c)), the sought justification is adequately achieved (level 3B justification, type C justification).

In this segment of the discussion, previous knowledge about G.C.D. is brought to bear, and a teacher's informing action leads to a justification. As the mobilized knowledge is not accurate with the situation, the justification is invalid albeit posed in at a logical level. By supporting another strategy and challenging the students to confirm a statement, previous knowledge about solving equations is used to justify using procedures properly. However, this proper justification is consolidated only after teacher's guiding actions. The first path in this segment considers only informing actions, while the second began by guiding actions and continues with challenging and further guiding actions.

Discussion

In the analyzed episodes, the task proposed triggered all situations. Two of these tasks gave the students the opportunity to develop procedures, one to discover the process of solving equations and another to discover where two functions intersect. In the moments of whole-class discussion presented, there were opportunities for justification that were not directly related to the situation presented by the task, but rather to other ideas, concepts and mathematical properties that emerged. This reinforces the idea that collective activity in mathematical discussions allows students to share, discuss and clarify their thinking and mathematical knowledge (Galbrait, 1995).

As referred by Kosko, Rougee and Herbst (2014), in order to understand the kind of students' justifications, it is not enough to focus on a specific question made by the teacher, but it is necessary to take into account his/her sequences of actions. This research shows that particular sequences of teacher actions based on the design principles make it likely that justifications will arise in whole-class discussions. In the episodes presented, when the principle of requesting a justification was followed, often by means of a challenging action, the students presented justifications. As could be expected, these justifications stand essentially on prior knowledge of mathematical concepts or ideas or known mathematical procedures and are often incomplete and sometimes incorrect. Thus, as in previous research (Galbrait, 1995), the use of available information about a particular concept or mathematical idea was not always adequate to what was defined or assumed in the task. When the justifications were incomplete, the teacher tended to guide the students to complete it, validating or invalidating their statements mostly implicitly. Depending on her perception of the support the students needed to mobilize their knowledge, the teacher provided them with more or less information. When an invalid justification arose, and in accordance with the formulated principles, the teacher valued the contribution of the students and insisted on encouraging them to present ideas. In these situations, when the student's justification was incorrect, the teacher's actions focused on abandoning such justification and challenging the students to present a new justification or guiding them to reformulate the justification so that it would become valid. As such, based on the design principles to enhance justifications and by means of a sequence of teacher's actions, complete justifications often arose in whole-class discussions.

In the episodes presented, the students' justifications, although sometimes incomplete or invalid, tended to be reasonably formal given that they were based on mathematical aspects of the situation. However, some of the justifications presented, either were not justifications at all or were based on authority. These cases emerged when students did not have the required mathematical tools to answer the justification challenge posed by the teacher, and the appropriately formal justification emerged when the teacher's informing actions introduced the required ideas for justification. In the context of whole-class discussions based on the formulated design principles, justifications of all levels of complexity emerged. In addition, in a whole-class discussion episode, as justifications emerged and teacher's actions supported it, justifications tended to increase its level of complexity. As these episodes illustrate, in order to promote opportunities for the students to move forward between levels of justification, it is not enough to ask them to justify and validate their justifications – it is also necessary to accept and appreciate partial and incorrect justifications.

Conclusion

The sequences of challenging, guiding and informing actions from the teacher, constitute a promising support for enhancing students' justifications and, thereby, students' mathematical reasoning. In order to achieve such sequences of actions, a close match between the design principles formulated and what happens in the classroom is necessary. In this study, as in other design-based research studies (e.g., Stylianides & Stylianides, 2009), this emerges from the systematic approach followed and the close interaction between researchers and teachers. However, it will be important to understand how this match can occur in professional development processes.

Another relevant finding of this study is that whole-class discussions oriented by the design principles resulted in opportunities for students to justify at different and increasing levels of formality and complexity. Moreover, looking to justifications led to clarify how they contribute to students' understanding of mathematical knowledge (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2017). Thus, regarding higher levels of complexity, to alternate between levels of deductive justification may promote opportunities to understand better the mathematical situation at stake.

By detailing task characteristics and sequences of teacher's actions supported by design principles regarding justifications, this study contributes to understanding how to promote students' justifications of different kinds. It will be important to know if this set of design principles can improve teachers' practice to enhance students' mathematical reasoning in other school grades, such as middle and high school levels. As stated above, another aspect to be further researched is how these design principles may inform professional development processes.

Acknowledgments

This work is supported by national funds through FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia by a grant to Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

References

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Eds.) *Mathematics, teacher and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher, 104*(9), 690-695.

Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(2), 171-191.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 13–58.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*, 3-22.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86,* 401-429. doi:10.1007/s10649-014-9532-8

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 49–66. doi:10.1007/s10857-010-9144-x

Galbrait, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412–417.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 14-19.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp.805-842). Reston, VA: NCTM.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 206-211.

Kosko, K., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26*(3), 459-476. doi:10.1007/s13394-013-0116-1

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255–276.

Martino, A., & Maher, C. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53-78.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 94*, 223-239. doi:10.1007/s10649-016-9720-9

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. Princetonm NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa, Portugal: APM.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Schliemann, A., Lessa, M., Lima, A., & Siqueira, A. (2003). Young children's understanding of equivalences. In A. Schliemann, D. Carraher & B. Brizuela (Eds.) *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice* (pp. 37-56). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stylianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Anexo 5

Equivalência entre os códigos usados para os princípios de design apresentados nos artigos e neste *kappa*.

kappa	Artigo II	Artigo III	Artigo IV
T1	a)	-	-
T2	d)	-	-
T3	b)	(ii)	-
T4	c)	(iii)	Apresentado sem código
T5	-	(i)	-
T6	-	(iv)	-
A1	i)	(a)	-
A2	ii)	-	-
A2′	-	(b)	-
A2″	-	-	(a)
A3	iii)	(c)	-
A3′	-	-	(b)
A4	iv)	-	-
A5	v)	(d)	-
A6	vi)	(e)	-
A7	vii)	-	-
A7′	-	-	-
A7″	-	(g)	-
A8	-	-	(c)
A9	-	(f)	-
A9’	-	-	-

Anexo 6

Alterações aos princípios de design ao longo da IBD.

	Princípios de design			
	Primeiro ciclo de design	**Segundo ciclo de design**	**Terceiro ciclo de design**	**Proposta de design**
Tarefas	[T1] Propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas.	[T5] Propor tarefas que incluam uma diversidade de questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios.		
	[T2] Propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio.			
	[T3] Propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações.			
	[T4] Propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução.			
	(inexistente)	[T6] Propor tarefas que incluam questões que permitem uma variedade de processos de resolução.		

	Princípios de design			
	Primeiro ciclo de design	**Segundo ciclo de design**	**Terceiro ciclo de design**	**Proposta de design**
Ações do professor	[A1] Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa.			(retirado)
	[A2] Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva.	[A2'] Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas.	[A2''] Propor situações que levem os alunos a justificar e apresentar justificações alternativas.	Apoiar ou desafiar os alunos a justificar ou apresentar justificações alternativas;
	[A3] Destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.		[A3'] Propor situações que levem os alunos a identificar justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.	Apoiar ou informar os alunos para identificar justificações válidas ou inválidas, enfatizando o que as valida;
	[A4] Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos.		(retirado)	
	[A5] Encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva.		[A8] Encorajar a partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique.	Desafiar ou apoiar os alunos na partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique;
	[A6] Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique.			
	(inexistente)	[A9] Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio como a generalização e a justificação.	[A9'] Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização.	
	[A7] Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações.	[A7'] Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações ou justificações.	[A7''] Desafiar os alunos a ir além da tarefa.	